

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ

П. А. Жилин

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

Сборник статей по материалам докладов на
ежегодной международной летней школе-конференции
“Актуальные проблемы механики”

Том 1

Санкт-Петербург
2006

УДК 539.3, 537.8, 536.1

П.А. Жилин. Актуальные проблемы механики. Сборник статей по материалам докладов на ежегодной международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики”. Том 1. – СПб.: Издание Института проблем машиноведения Российской Академии наук. 2006. 306 с.

Редакционная коллегия: Е.А. Иванова, Д.А. Индейцев, А.М. Кривцов.

В сборнике представлены доклады П.А. Жилина, прочитанные в период с 1994 по 2005 гг. на международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики”. Сборник издается в двух томах: первый том содержит статьи на русском языке, второй — на английском. Круг обсуждаемых вопросов широк. Он включает в себя фундаментальные законы механики, прямое тензорное исчисление, динамику абсолютно твердого тела, нелинейную теорию стержней, общую теорию неупругих сред, в том числе пластичность, консолидирующиеся сыпучие среды, фазовые переходы, а также пьезоупругость, ферромагнетизм, электродинамику и квантовую механику. Сборник статей П.А. Жилина фактически представляет собой изложение метода построения континуальных теорий с вращательными степенями свободы, необходимого для этого математического аппарата, а также примеров использования указанных теорий при описании различных физических явлений.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области механики и теоретической физики.

ISBN

© О.П. Жилина

© Институт проблем машиноведения Российской Академии наук

Предисловие

В сборнике представлены доклады П.А. Жилина, прочитанные им или его соавторами в разные годы в период с 1994 по 2005 гг. на международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики”. Сборник издается в двух томах: первый том содержит статьи на русском языке, второй — на английском. В обоих томах статьи расположены в хронологическом порядке. Круг обсуждаемых вопросов широк. Он включает в себя фундаментальные законы механики, прямое тензорное исчисление, динамику абсолютно твердого тела, нелинейную теорию стержней, общую теорию неупругих сред, в том числе пластичность, консолидирующиеся сыпучие среды, фазовые переходы, а также пьезоупругость, ферромагнетизм, электродинамику и квантовую механику. На первый взгляд кажется, что доклады не связаны между собой. Однако это не так. Приведем несколько примеров. Твердотельный осциллятор, который вводится в рассмотрение в докладе, относящемся к области динамики абсолютно твердого тела, в дальнейшем используется в качестве основной модели при построении теории неупругих сред, теории пьезоупругости и теории ферромагнетизма. Методы описания спинорных движений, основанные на использовании прямого тензорного исчисления, применяются и развиваются, как при решении задач динамики абсолютно твердого тела, так и при решении задач нелинейной теории стержней. Эти же методы используются при построении различных континуальных моделей, учитывающих вращательные степени свободы. Теория симметрии и теория инвариантов тензорных величин, которые представлены в докладе, посвященном этой тематике, активно используются и развиваются при построении теории стержней, а также других континуальных теорий. Два доклада посвящены формулировке фундаментальных законов механики Эйлера — механики тел общего вида, состоящих из частиц с вращательными степенями свободы. Все континуальные теории, представленные в сборнике, включая электродинамику, строятся с единых позиций, исходя из фундаментальных законов механики. При построении континуальных моделей, как упругих, так и неупругих сред, применяется теория деформаций, в основе которой лежит идея использования приведенного уравнения баланса энергии для определения мер деформации. На элементарных примерах механики дискретных систем вводятся понятия внутренней энергии, химического потенциала, температуры и энтропии. Определение этих понятий дается посредством чисто механических аргументов, основанных на использовании специальной математической формулировки уравнения баланса энергии. Тот же самый метод введения указанных выше основных понятий термодинамики используется и при построении различных континуальных теорий.

Сборник статей П.А. Жилина фактически представляет собой изложение метода построения континуальных теорий с вращательными степенями свободы, необходимого для этого математического аппарата, а также примеров использования указанных теорий при описании различных физических явлений. В первый том сборника среди прочих статей включены две статьи, посвященные фундаментальным законам механики, написанные с большим временным промежутком, и две статьи по теории стержней, также написанные в разные годы. Читателю предоставляется возможность проследить развитие научных идей. Первая статья, посвященная фундаментальным законам механики, представляет собой вполне законченную, логически строгую теорию. Тем не менее, автор, спустя несколько лет, возвращается к этой тематике. Но не для того, что бы что-то изменить в первоначальном варианте статьи, а для того, чтобы дополнить его, включив термодинамические понятия. Сказанное в равной мере относится и к двум статьям по теории стержней. Не каждая физическая теория допускает включение новых понятий. Зачастую, при необходимости описать новое явление, приходится отказываться от старой теории и строить вместо нее новую теорию. Теории, представленные в сборнике, обладают способностью развиваться. Именно в этом их главное достоинство и благодаря этому они привлекают внимание исследователей.

Редакционная коллегия выражает благодарность Н.А. Жилиной за помощь при подготовке книги к публикации.

Е.А. Иванова, Д.А. Индейцев, А.М. Кривцов

Содержание

П.А. Жилин — поиск Истины	6
Краткая биография и научные результаты П.А. Жилина	10
Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики (1995)	33
Реальность и механика (1996)	54
Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании (1997)	91
Нелинейная теория стержней и ее приложения (1997)	115
А.И. Лурье — работы по механике (2001)	141
Основные уравнения теории неупругих сред (2001)	155
Основные положения эйлеровой механики (2002)	204
Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа (2003)	241
Нелинейная теория тонких стержней (2005)	256
Основные публикации П.А. Жилина	298

П.А. Жилин — поиск Истины

*“Нет действия в природе без причины;
постигни причину, и тебе не нужен опыт.”*

Леонардо да Винчи

Для научного сообщества конца XX — начала XXI века характерны прагматизм и узкая специализация. Ни в малейшей степени это не относится к Павлу Андреевичу Жилину. Искренний интерес, желание познать Истину и донести свои знания до людей были единственными мотивами его деятельности. Широта научных интересов Павла Андреевича поражает — его работы, носящие фундаментальный характер, охватывают практически все области механики и распространяются на электродинамику и квантовую физику. Никто не сможет выразить взгляды Павла Андреевича на науку лучше, чем он сам:

“Целью всякой науки является познание Реальности. При этом наука исследует не Реальность саму по себе, а некие упрощенные модели Реальности. Приближение к истинной Реальности осуществляется путем расширения модели. Однако, чтобы построить модель, нам, как минимум, необходимо знать, что мы собственно собираемся моделировать. Иными словами, мы должны иметь априорное представление о Реальности. Получается заколдованный круг: чтобы познать Реальность необходима Наука, а чтобы создать Науку необходимо знание Реальности. К счастью, решение этой, казалось бы неразрешимой, проблемы заложено в самой природе человеческого ума, который имеет две качественно различные категории: а) интуицию и б) интеллект.

Интуиция — это способность человека к прямому восприятию окружающего нас мира, которая отнюдь не сводится к пяти основным органам чувств. Это хорошо сознают поэты, музыканты, художники и другие представители искусства. Интуиция, как и любая другая способность человека, хорошо поддается тренировке, однако требует постоянных целенаправленных усилий.

Интеллект — это способность человека к логическим суждениям, основанным на априорных знаниях, заложенных в “память” интеллекта. Практически точным аналогом интеллекта является мощный современный компьютер.”

Из статьи “Реальность и механика”

Доктор физико-математической наук, профессор, автор свыше 200 научных работ, многие из которых опубликованы в реферируемых и рецензируемых изданиях, научный руководитель, подготовивший не одно поколение кандидатов и докторов наук, Павел Андреевич Жилин был человеком широких взглядов и большой эрудиции. Будучи, по общественному положению, служителем официальной науки, он глубоко интересовался восточными философиями. Фундаментальные научные идеи Павла Андреевича, касающиеся важности спинорных движений при описании явлений на микроуровне и моделировании электромагнитного поля, перекликаются с различного рода метафизическими представлениями об устройстве мира. Эти идеи в той или иной форме высказывались классиками науки, работы которых Павел Андреевич изучал самым подробным образом. Достижение Павла Андреевича Жилина заключается в том, что у него эти идеи излагаются не в виде общих слов и предположений, а в форме строгих математических моделей. То, что Павел Андреевич пишет об интуитивном восприятии окружающего мира, основано не только на книгах, но и на его личном опыте прямого получения научных знаний:

“В принципе возможно использовать интуитивный и интеллектуальный методы познания независимо друг от друга. Интуитивное познание имеет тот недостаток, что ему невозможно обучить кого бы то ни было. Однако именно интуитивный метод лежит в основе составления научных моделей. Чисто интеллектуальный подход может создавать видимость научных открытий, но по существу он бесплоден. Особую популярность в последние десятилетия приобрела философия “черного ящика”, которая относится к достижениям интеллектуального метода. Казалось, что этот путь может привести к успеху. Однако на проверку оказалось, что “черный ящик” хорош только тогда, когда он прозрачен, т.е. его содержимое заранее известно. Достоинством интеллектуального метода является то, что его достижениям легко обучать учеников.

Интеллектуальный метод охарактеризуем словами А.Эйнштейна: “Наука является созданием человеческого разума с его свободно изобретенными идеями и понятиями”.

Интуитивный метод познания лучше всего характеризуется словами Сократа: при интуитивном познании “душа взбирается на высочайшую наблюдательную башню бытия”.

Главный тезис этой работы: никакое истинное развитие науки невозможно без непосредственного участия интуиции, а свободно изобретенных идей и понятий не существует в природе.”

Из статьи “Реальность и механика”

Занимая административные должности — заведующий кафедрой “Теоретическая механика” Санкт-Петербургского государственного политехнического университета,

заведующий лабораторией “Динамика механических систем” Института проблем машиноведения РАН, принимая активное участие в общественной жизни — член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член Международного общества прикладной математики и механики (ГАММ), член президиума Научно-методического совета по прикладной механике Министерства высшего образования РФ, действительный член Санкт-Петербургской АН по проблемам прочности, член трех диссертационных советов, Павел Андреевич Жилин, прежде всего, был Ученым, для которого Наука стала смыслом жизни и делом жизни, и Учителем, оказавшим огромное влияние не только на своих прямых учеников — аспирантов и докторантов, но и на многих людей, в той или иной степени, считающих себя его учениками.

Одной из главных своих задач Павел Андреевич Жилин считал расширение области применения механики и описание явлений, изучаемых в различных областях естествознания, с единых рациональных позиций, присущих механике. Следующая цитата выражает взгляды Павла Андреевича на механику, как на метод изучения Природы, и на ту роль, которую должна играть механика в науке XXI века:

“Механика — это не теория какого бы то ни было явления Природы, но метод исследования Природы. В основах механики нет ни одного закона, который хотя бы в принципе мог быть опровергнут экспериментально. В фундаменте механики лежат логические утверждения, выражающие условия баланса неких величин и которые сами по себе не достаточны для построения замкнутых теорий. Для этого необходимо привлекать дополнительные законы, типа закона всемирного тяготения, рассматриваемые как экспериментально установленные факты. Эти дополнительные законы могут оказаться недостаточными или даже ошибочными, но отказ от них не влияет на метод механики. Упомянутая незамкнутость механики может, конечно, восприниматься как ее недостаток людьми, которые полагают, что человечество близко к конечному познанию Мироздания. Те же, кто способен увидеть Реальность, понимают, как бесконечно далеки люди от возможности правильно описать даже относительно простые проявления Реальности. Поэтому корректный метод изучения Природы по необходимости должен включать в себя заранее неопределенные элементы, манипулируя которыми можно улучшать те или иные теории разного рода явлений и тем самым расширять наши представления о Реальности. Механика устанавливает определенные ограничения на допустимую структуру этих неопределенных элементов, но сохраняет в них достаточно широкий произвол.”

Из статьи “Реальность и механика”

Одним из важнейших итогов научной и преподавательской деятельности Павла Андреевича Жилина стала книга объемом почти в тысячу страниц, только часть которой была опубликована при его жизни. Книга представляет собой курс механики Эйлера — механики, учитывающей, на равных правах, как поступательные, так и вращательные степени свободы. В ней нашли отражение идеи Павла Андреевича, связанные с учетом спинорных движений на микроуровне, использованием моделей открытых тел, а также введением физических характеристик состояния (температуры, энтропии, химического потенциала) методами рациональной механики.

Павел Андреевич мечтал открыть рациональной механике путь в микромир и включить в нее электродинамику. Многие люди мечтают и многие ставят перед собой большие задачи. Далеко не всем удается достичь цели. Павел Андреевич Жилин умел претворять свои мечты в жизнь. В рамках классической механики он предложил модели сред, математическое описание которых сводится к уравнениям электродинамики и квантовой механики. Взгляды Павла Андреевича, зачастую, расходятся с общепринятой точкой зрения, его идеи вызывают споры, но

“Кто спорит, ссылаясь на авторитет, тот применяет не свой ум, а скорее память.”

Леонардо да Винчи

Е.А. Иванова, Д.А. Индейцев, А.М. Кривцов

Краткая биография и научные результаты П.А. Жилина*

Павел Андреевич Жилин был заведующим кафедрой “Теоретическая механика” Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, заведующим лабораторией “Динамика механических систем” Института проблем машиноведения РАН, членом Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, членом Международного общества прикладной математики и механики (ГАММ), членом президиума Научно-методического совета по прикладной механике Министерства высшего образования РФ, действительным членом Санкт-Петербургской АН по проблемам прочности. Ему принадлежит свыше 200 научных работ, монографии “Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве” (2001), “Теоретическая механика: фундаментальные законы механики” (2003). Под руководством П.А. Жилина защищено шестнадцать кандидатских и шесть докторских диссертаций.

Павел Андреевич родился 8 февраля 1942 г. в городе Великий Устюг Вологодской области, где семья оказалась во время войны. Детство Павла Андреевича прошло в Волхове и Подпорожье — городах, связанных с работой его отца, Андрея Павловича Жилина. Волховская ГЭС, каскад Свирских электростанций — места работы А.П. Жилина. Андрей Павлович был энергетиком, в то время — главным инженером каскада Свирских гидроэлектростанций. Мать Павла Андреевича, Зоя Алексеевна Жилина, воспитывала сыновей и вела домашнее хозяйство. В 1956 году Андрей Павлович был переведен на должность главного энергетика во всесоюзном тресте “Гидроэлектромонтаж” и семья переехала в Ленинград. Старший брат, Сергей Андреевич Жилин, пошел по стопам отца, стал инженером и участвует в создании высоковольтных электрических аппаратов. Павел Андреевич в 1959 г. закончил 172 среднюю школу и поступил в Ленинградский политехнический институт. Еще в школе Павел Андреевич познакомился со своей будущей женой, Ниной Александровной, которая была ему верным другом и помощником на протяжении всей жизни. Во время учебы в институте Павел Андреевич увлекся настольным теннисом и на протяжении многих лет был капитаном студенческой, а позже институтской команды,

*Редакционная коллегия приносит благодарность Н.А. Жилиной за предоставленные биографические данные. При составлении обзора научных результатов, по возможности, максимально использовался оригинальный текст П.А. Жилина, взятый из его рукописей и статей.

неоднократно побеждавшей на первенствах города среди студенческих и спортивных коллективов. П.А. Жилину было присвоено звание кандидата в мастера спорта (в то время высшее звание в этой спортивной дисциплине).

В период 1959–1965 гг. Павел Андреевич Жилин учился в Ленинградском политехническом институте на кафедре “Механика и процессы управления” физико-механического факультета. Эту же кафедру впоследствии закончила дочь Павла Андреевича, Ольга Павловна Жилина. По окончании института П.А. Жилин получил квалификацию инженер-физик по специальности “Динамика и прочность машин” и в период 1965–1967 гг. работал инженером в отделе прочности гидротурбин Центрального котлотурбинного института. В 1967 г. был принят на кафедру “Механика и процессы управления”, где работал сначала в должности ассистента, затем старшего научного сотрудника, доцента и профессора. Основателем кафедры и ее заведующим был Анатолий Исаакович Лурье, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент АН СССР, всемирно известный ученый. Павел Андреевич стал любимым учеником А.И. Лурье, много часов он провел в совместной работе с Анатолием Исааковичем за его рабочим столом, научное мировоззрение Павла Андреевича в значительной степени формировалось под влиянием Анатолия Исааковича. П.А. Жилин — кандидат физико-математических наук с 1968 г. (тема диссертации “Теория ребристых оболочек”), доктор физико-математических наук с 1984 г. (тема диссертации “Теория простых оболочек и ее приложения”), профессор по кафедре механики и процессов управления с 1989 г. В 1974–1975 гг. П.А. Жилин проходил стажировку в Датском техническом университете (Дания). Работая на кафедре “Механика и процессы управления” П.А. Жилин читал лекции по аналитической механике, теории колебаний, теории упругости, теории оболочек, тензорному анализу, механике сплошных сред. В 1988 г. он был приглашен в Ярмукский университет (Иордания) для постановки курса “Механика сплошных сред” на физическом факультете. Одновременно с преподаванием, П.А. Жилин активно вел научную работу в области теории пластин и оболочек, нелинейной теории стержней, теории упругости, механики сплошных сред; им получено три свидетельства об изобретении в области виброизоляции и гидроакустики, ему присвоен знак “Изобретатель СССР”.

С 1989 года Павел Андреевич — заведующий кафедрой “Теоретическая механика”. За время его руководства кафедрой пятеро сотрудников защитили докторские диссертации, у четверых из них Павел Андреевич был научным консультантом. Во время работы на кафедре “Теоретическая механика” П.А. Жилин поставил и читал оригинальные курсы тензорной алгебры, теоретической механики и теории стержней. В этот период времени Павел Андреевич серьезно работал в области исследования и разработки фундаментальных основ механики. К этому периоду относятся его исследования спинорных движений в механике и физике, фазовых переходов и явлений неупругости, электродинамики с позиций рациональной механики, логических основ механики. С 1994 года Павел Андреевич — заведующий лабораторией “Динамика механических систем” Института проблем машиноведения РАН. С 1993 г. он состоял членом научного комитета ежегодной международной школы-конференции “Актуальные проблемы механики” (“Advanced Problems in Mechanics”), проводимой Институтом проблем машиноведения РАН.

4 декабря 2005 года Павел Андреевич Жилин ушел из этой жизни. Его жизненный путь стал частью истории науки. Трудно оценить влияние, которое оказал Павел Андреевич на его учеников, коллег, всех, кому выпало счастье личного знакомства с ним. У него была необыкновенная способность пробуждать интерес к науке, заставлять взглянуть по-новому, с неожиданной стороны на окружающий нас мир. Павел Андреевич был отзывчивым, добрым человеком, у которого для каждого всегда находился дельный совет и поддержка. Поражали в Павле Андреевиче его выдающиеся человеческие качества, его абсолютная научная и человеческая честность. Мы, ученики, благодарны судьбе, подарившей нам возможность общения с этим замечательным человеком и выдающимся ученым, ставшим для нас олицетворением духовности.

Научные результаты

Теория оболочек

Разработке теории оболочек посвящены ранние работы П.А. Жилина, его кандидатская и докторская диссертации. Когда П.А. Жилин начал свои исследования в этой области, ситуация с теоретическим описанием конструкций типа оболочек была следующая. Из множества подобных конструкций выделялись некоторые подмножества элементов, обладающих сходными свойствами; для них разрабатывались соответствующие варианты теорий оболочек, такие как: теория тонких однослойных оболочек; теория конструктивно-анизотропных оболочек; теория ребристых оболочек; теория тонких многослойных оболочек; теория перфорированных оболочек; теория сетчатых оболочек; теория однослойных оболочек не малой толщины и целый ряд других. В рамках каждого из перечисленных вариантов можно указать несколько версий, различающихся как исходными посылками, так и конечными уравнениями. Процесс развития этих теорий оболочек нельзя считать законченным, поскольку в технике непрерывно возникают новые конструкции, расчет которых в рамках существующих вариантов теорий оказывается невозможным. П.А. Жилиным построена (1975–1984) общая нелинейная теория термоупругих оболочек, метод построения которой принципиально отличается от всех известных вариантов построения теории оболочек и легко переносится на любые конструкции типа оболочек и другие объекты механики сплошных сред. Наиболее полно этот подход изложен в работе [1].

1. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 167 с.

Дискретно подкрепленные термоупругие оболочки

Разработана (1965–1970) общая теория дискретно подкрепленных термоупругих оболочек [1, 3] и даны ее приложения к решению практически важных задач: расчет спиральной камеры высоконапорных гидротурбин Нурекской ГЭС [2] и вакуумной камеры термоядерной установки Токамак-20 [4].

Предложена (1966) реализация метода Стеклова-Фубини для дифференциальных уравнений, коэффициенты которых содержат особенности типа δ -функций. Применительно к дискретно подкрепленным цилиндрическим оболочкам метод позволил найти решение в явном виде [5].

1. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек // Труды ЦКТИ. 1968. N 88. С. 46–70.
2. Жилин П.А. Михеев В.И. Торообразная оболочка с меридиональными ребрами для расчета спиральных камер гидротурбин // Труды ЦКТИ. 1968. N 88. С. 91–99.
3. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. N 4. С. 150–162.
4. Жилин П.А., Конюшевская Р.М., Пальмов В.А., Чвартацкий Р.В. К расчету напряженно-деформированного состояния разрядных камер установок Токамак. Л., НИИЭФА П-ОМ-0550. 1982. С. 1–13.
5. Жилин П.А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1966. N 5. С. 139–142.

Новая формулировка второго закона термодинамики, относящаяся к тонким поверхностям

Предложена (1973) новая формулировка второго закона термодинамики [1–4] в виде двух связанных неравенств типа Клаузиуса-Дюгема-Трусделла. Формулировка относится к тонким поверхностям, каждая сторона которых наделяется собственной температурой и энтропией. Таким образом, в формулировку входят две энтропии, два внутренних температурных поля и два внешних температурных поля. Помимо теории оболочек, данная формулировка оказалась полезной в физике твердого тела при изучении влияния поверхностных эффектов на свойства твердых тел, а также при описании поверхностей раздела между различными фазами твердого тела.

1. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Surfaces. The Danish Center for Appl. Math and Mech. Report N 89. 1975. P. 1–29.
2. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces and Shell Theory. The Danish Center for Appl. Math and Mech. Annual report. 1975.
3. Жилин П.А. Механика деформируемых оснащенных поверхностей // Труды 9-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Л., “Судостроение”. 1975. С. 48–54.
4. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces // Int. J. Solids Structures. 1976. Vol. 12. P. 635–648.

Обобщение классической теории симметрии тензорных величин

Введено (1977) важное дополнение в алгебру тензоров, а именно понятие ориентированных тензоров, т. е. объектов, зависящих от выбора ориентации как в трехмерном пространстве, так и в его подпространствах. Для ориентированных тензоров сформулирована теория симметрии [1, 2], обобщающая классическую теорию симметрии,

применимую только для евклидовых тензоров. Показано, что применение классической теории, например, к аксиальным тензорам, т. е. объектам, зависящим от выбора ориентации в трехмерном пространстве, ведет к ошибочным выводам. Предложенная теория оказывается необходимой при построении определяющих уравнений оболочек и других мультиполярных сред, а также при рассмотрении ионных кристаллов.

1. Жилин П.А. Общая теория определяющих уравнений в линейной теории упругих оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. N 3. С. 190.
2. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. N 386. 1982. С. 29–46.

Общая нелинейная теория термоупругих оболочек

Построена (1975–1984) общая нелинейная теория термоупругих оболочек. Метод построения принципиально отличается от всех известных вариантов построения теории оболочек и легко переносится на другие объекты механики сплошных сред. Главная особенность метода в том, что с его помощью можно изучать объекты типа оболочек сложного внутреннего строения, т. е. в тех случаях, когда традиционные методы построения теории оболочек не применимы [1–11]. Для оболочек постоянной толщины из изотропного материала новый метод ведет к результатам, которые хорошо согласуются с полученными классическими методами и дают превосходное согласие с трехмерной теорией упругости при любых внешних воздействиях, включая сосредоточенные силы.

1. Жилин П.А. Двумерная деформируемая среда. Математическая теория и физические интерпретации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. N 6. С. 207–208.
2. Жилин П.А. Современная трактовка теории оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1974. N 4.
3. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Surfaces. The Danish Center for Appl. Math and Mech. Report N 89. 1975. P. 1–29.
4. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces and Shell Theory. The Danish Center for Appl. Math and Mech. Annual report. 1975.
5. Жилин П.А. Механика деформируемых оснащенных поверхностей // // Труды 9-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Л., “Судостроение”. 1975. С. 48–54.
6. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces // Int. J. Solids Structures. 1976. Vol. 12. P. 635–648.
7. Жилин П.А. Общая теория определяющих уравнений в линейной теории упругих оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. N 3. С. 190.
8. Жилин П.А. Новый метод построения теории тонких упругих оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. N 3.

9. Жилин П.А. Прямое построение теории оболочек на основании физических принципов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1980. N 3. С. 179.
10. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. N 386. 1982. С. 29–46.
11. Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. Advances in mechanics — Warszawa, Polska. 1988. N 4. С. 107–148.

Устранение парадокса в задаче о прогибе круглой пластины

Построено (1982) точное аналитическое решение задачи о конечных перемещениях круглой гибкой пластины [1, 2]. Полученное решение устранило известный парадокс, содержащийся в справочниках и заключающийся в том, что прогиб мембраны, т. е. пластины без учета жесткости на изгиб, оказывается меньше, чем прогиб, найденный с учетом жесткости на изгиб. (Речь идет о круглой пластине, защемленной по контуру и нагруженной поперечным давлением, величина которого исключает использование линейной теории, причем последняя завышает прогиб примерно в 25 раз). Позднее, идея работ [1, 2] была использована при расчете электродинамического затвора [3].

1. Жилин П.А. Осесимметричный изгиб гибкой круглой пластинки при больших перемещениях // Вычислительные методы в механике и управлении. Труды ЛПИ. N 388. 1982. С. 97–106.
2. Жилин П.А. Осесимметричный изгиб круглой пластинки при больших перемещениях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. N 3. С. 138–144.
3. Венатовский И.В., Жилин П.А., Комягин Д.Ю. Авторское свидетельство N 1490663 с приоритетом от 2 ноября 1987 г.

Критические обзоры

1. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. N 3. С. 48–64.
2. Жилин П.А. О классической теории пластин и преобразовании Кельвина-Гэта // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. N 4. С. 133–140.
3. Altenbach H., Zhilin P.A. The Theory of Simple Elastic Shells // in Critical Review of The Theories of Plates and Shells and New Applications, ed. by H. Altenbach and R. Kienzler. Berlin, Springer. 2004. P. 1–12.

Теория стержней

Построена (1987–2005) динамическая теория тонких пространственно изогнутых и естественно закрученных стержней. Предлагаемая теория включает в себя все известные варианты теории стержней, но обладает более широкой областью применимости. Значительное внимание уделено анализу ряда классических задач, включая те из них, решение которых ведет к парадоксальным результатам. Наиболее полно результаты по теории стержней изложены в работе [1].

1. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 98 с. (В печати)

Общая нелинейная теория стержней и ее приложения к решению конкретных задач

На основе метода, разработанного при построении теории оболочек, сформулирована (1987) общая нелинейная теория гибких стержней [1], в которой учитываются все основные виды деформации: изгиб, кручение, растяжение, поперечный сдвиг. Применение тензора поворота позволило записать уравнения в компактной форме, удобной для математического исследования. В отличие от всех известных теорий, предлагаемая теория описывает экспериментально открытый эффект Пойнтинга, состоящий в укорочении стержня при его кручении. Построенная теория применялась для анализа ряда конкретных задач [2, 3]. Предложен (2005) новый метод [4–6] построения тензоров упругости и установлена их структура. При этом существенно используется новая теория симметрии тензоров, определенных в пространстве с двумя независимыми ориентациями. Для плоских упругих кривых определены все модули упругости.

1. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНТИ N 1912-B87 Деп. 20 с.
2. Жилин П.А., Товстик Т.П. Вращение твердого тела на инерционном стержне // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. N 458. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1995. С. 78–83.
3. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Тр. XXIV Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1997. С. 313–337.
4. Жилин П.А. Теория тонких упругих стержней // Лекция на XXXIII летней школе - конференции “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2005. Настоящий сборник. Т. 1.
5. Zhilin P.A. Nonlinear Theory of Thin Rods // Lecture at XXXIII Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg, Russia. 2005. Current book. Vol. 2.
6. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 98 с. (В печати)

Эластика Эйлера

Рассмотрена (1997–2005) знаменитая эластика Эйлера [1–5] и показано, что наряду с известными равновесными конфигурациями в ней существуют и динамические равновесные конфигурации. При этом форма упругой линии не меняется, а изогнутый стержень совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси. Энергия деформации при этом не меняется. Подчеркнем, что речь не идет о движениях стержня как жесткого целого, поскольку заделанный торец стержня остается неподвижным.

Отсюда следует, что изогнутая равновесная конфигурация в эластике Эйлера является, вопреки общепринятой точке зрения, неустойчивой. С другой стороны, этот вывод не подтверждается экспериментальными данными. Поэтому возникает парадоксальная ситуация, которая требует своего решения.

1. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Тр. XXIV Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1997. С. 313–337.
2. Zhilin P.A. Dynamic Forms of Equilibrium Bar Compressed by a Dead Force // Proc. of 1st Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos. Vol. 3. 1997. P. 399–402.
3. Жилин П.А. Теория тонких упругих стержней // Лекция на XXXIII летней школе - конференции “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2005. Настоящий сборник. Т. 1.
4. Zhilin P.A. Nonlinear Theory of Thin Rods // Lecture at XXXIII Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg, Russia. 2005. Current book. Vol. 2.
5. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 98 с. (В печати)

Парадокс Николаи

Анализируется (1993–2005) ситуация [1–7], известная под названием парадокса Николаи, которая возникает при кручении стержня торцевым моментом. В этом случае эксперимент показывает, что крутящий момент, оказывает стабилизирующее действие, что находится в резком противоречии с теорией. Показано [6], что избежать указанных парадоксов можно при специальном выборе определяющего уравнения для момента. Оказывается, что момент должен специальным образом зависеть от угловой скорости. Последняя зависимость не связана с наличием (или отсутствием) внутреннего трения в стержне.

1. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Кручение упругого консольного стержня моментом, приложенным на свободном торце. С.-Пб.: Изд. СПбГТУ. 1993. 32 с.
2. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Экспериментальное исследование устойчивости консольного стержня при кручении // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1993. N 446. С. 174–175.
3. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. N 448. С. 47–56.
4. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Тр. XXIV Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1997. С. 313–337.

5. Жилин П.А. Теория тонких упругих стержней // Лекция на XXXIII летней школе - конференции "Актуальные проблемы механики". С.-Петербург. 2005. Настоящий сборник. Т. 1.
6. Zhilin P.A. Nonlinear Theory of Thin Rods // Lecture at XXXIII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg, Russia. 2005. Current book. Vol. 2.
7. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 98 с. (В печати)

Развитие математических методов

Предложен (1995) подход [1], позволяющий анализировать устойчивость движений при наличии спинорных движений, описываемых тензором поворота. Проблема в том, что тензоры поворота не являются, в отличие от векторов перемещений, элементами линейного пространства. Поэтому уравнения в вариациях выписываются в виде цепочки уравнений, правые части которых нелинейно зависят от предыдущих вариаций. Тем не менее, полученная цепочка уравнений допускает точное разделение переменных, т.е. отделение временной переменной.

1. Жилин П.А. Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1995. N 458. С. 56–73.

Динамика абсолютно твердого тела

Впервые динамика абсолютно твердого тела изложена на языке прямого тензорного исчисления. Разработан математический аппарат описания спинорных движений, основанный на использовании тензора поворота и связанных с ним понятий. Наиболее полное отражение новые результаты в области динамики абсолютно твердого тела нашли в работах:

1. Жилин П.А. Теоретическая механика. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2001. 146 с.
2. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор. 2001. 276 с.
3. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.

Развитие математических методов

Дано (1992) общее исследование тензора поворота — работы [1, 7, 8], где предложено новое доказательство кинематического уравнения Эйлера. Правильное доказательство последнего было у Л. Эйлера и в старых учебниках по теоретической механике, но оно было чрезвычайно громоздким. В известном курсе Т. Леви-Чивиты

и У.Амальди (1922) впервые появилось очень компактное, но ошибочное, доказательство кинематического уравнения Эйлера. Позднее это доказательство проникло практически во все современные курсы (исключая курс Г.К.Суслова). В работе [1] приведено доказательство новой теоремы сложения угловых скоростей, отличающейся от приводимых в учебниках.

Выведено (1992) новое уравнение [1, 4–8], связывающее левую угловую скорость с производной от вектора поворота. Это уравнение оказывается необходимым при определении понятия потенциального момента. Кроме того, оно оказывается чрезвычайно полезным при численных решениях задач динамики твердого тела, поскольку при этом вообще не возникает необходимость вводить системы углов или системы параметров типа Клейна-Гамильтона.

Доказана (1995) новая теорема [2, 3, 7, 8] о представлении тензора поворота в виде композиции поворотов вокруг произвольно выбираемых фиксированных осей. Все известные представления тензора поворота (точнее его матричных аналогов) через углы Эйлера, углы Брайнта, самолетные и корабельные углы и т. д. являются частными случаями общей теоремы, роль которой, тем не менее, вовсе не сводится к простому обобщению. Суть вопроса в том, что при традиционном выборе системы углов, независимо каких именно, мы предварительно выбираем оси, поворотами вокруг которых мы описываем рассматриваемое (неизвестное заранее) вращение тела. Если этот выбор осей сделан неудачно, а удачный выбор проблематичен, то шансы проинтегрировать, и даже качественно проанализировать, получающуюся в результате систему уравнений весьма невелики. Более того, даже в тех случаях, когда проинтегрировать систему удастся, практическая польза от полученного решения зачастую невелика, так как очень часто это решение будет содержать либо полюсы, либо неопределенности типа ноль делить на ноль. В результате, численное решение, получаемое с помощью ЭВМ, после первого же полюса или неопределенности оказывается сильно искаженным. Достоинство и назначение обсуждаемой теоремы в том, что она позволяет рассматривать оси вращения как основные неизвестные и определять их в процессе решения задачи. В результате удается получать простейшие, из всех возможных форм, представления решения.

Предложен (1997) подход [4–6], позволяющий анализировать устойчивость движений при наличии спинорных движений, описываемых тензором поворота. Развита метод возмущений на множестве собственно ортогональных тензоров.

1. Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1992. N 443. С. 100–121.
2. Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Euler-Poinsot problem // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **75**. (1995) S 1. P. 133–134.
3. Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **76**. (1996) N 4. P. 187–204.
4. Жилин П.А. Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на упругом основании // Тр. XXIV школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1997. С. 90–122.

5. Zhilin P.A. A General Model of Rigid Body Oscillator // Proc. of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". Vol. 1. St.Petersburg. 1998. P. 288–314.
6. Zhilin P.A. Rigid body oscillator: a general model and some results // Acta Mechanica. Vol. 142. (2000) P. 169–193.
7. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор. 2001. 276 с.
8. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.

Новые решения классических задач

Получено (1995) новое решение [1, 2] классической задачи о свободном вращении твердого тела вокруг неподвижного центра масс (случай Эйлера). Показано, что для каждого тензора инерции тела вся область начальных данных разбивается на две подобласти. Известно, что не существует такой системы параметров, чтобы одной картой без полюсов покрыть всю область начальных данных. Этот факт подтвержден и в работе [2], где в каждой из двух подобластей и для границы раздела тело вращается вокруг различных осей, которые зависят только от начальных данных. Внутренним точкам упомянутых подобластей отвечают устойчивые вращения тела, а границе раздела отвечают неустойчивые вращения. При построении решения существенную роль играет описанная выше теорема о представлении тензора поворота. В конечном счете все искомые характеристики выражаются через одну функцию, определяемую быстро сходящимся рядом весьма простого вида. Поэтому при вычислениях никаких проблем не возникает. Правильность определения осей, вокруг которых поворачивается тело, проявляется в том, что скорости прецессии и собственного вращения оказываются знакопостоянными. Напомним, что в известных решениях знакопостоянна только скорость прецессии, т.е. в этих решениях правильно угадана только одна из двух осей поворота. Из решения [2] следует, что формально устойчивые решения, тем не менее, практически могут оказаться неустойчивыми, если некий параметр оказывается достаточно малым (границе раздела отвечает нулевое значение параметра). В этом случае тело может перескочить из одного устойчивого режима вращения на другой устойчивый режим в результате сколь угодно малых и кратковременных внешних воздействий (удар малого метеорита).

Получено (1996, 2003) новое решение [3, 4] классической задачи о вращении твердого тела с трансверсально изотропным тензором инерции в однородном поле тяготения (случай Лагранжа). С формально-математической точки зрения решение этой задачи известно очень давно и приведено во многих книгах и учебниках. Тем не менее, известное решение трудно поддается ясному физическому истолкованию и неоправданно сложно описывает некоторые простые типы движения. В случае быстровращающегося гироскопа получено практически точное решение в элементарных функциях. Показано [4], что выражение для скорости прецессии, найденное по элементарной теории гироскопов дает ошибку в главном члене.

В рамках динамики абсолютно твердого тела найдено (2003) объяснение того факта, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется [5]. Обычно этот факт объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Однако, если направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли, то ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. При этом смена суток на Земле будет определяться не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси.

1. Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Euler-Poinsot problem // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **75**. (1995) S 1. P. 133–134.
2. Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **76**. (1996) N 4. P. 187–204.
3. Zhilin P.A. Rotations of Rigid Body with Small Angles of Nutation // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **76**. (1996) S 2. P. 711–712.
4. Жилин П.А. Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа // Доклад на XXXI летней школе “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2003. Настоящий сборник. Т. 1.
5. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.

Новые модели в рамках динамики абсолютно твердого тела

Известна роль, которую играет обычный осциллятор в ньютоновской механике. В эйлеровской механике аналогичную роль играет твердое тело на упругом основании. Такая система может быть названа твердотельным осциллятором. Последний необходим при построении динамики мультиполярных сред, но в общем случае в литературе не только не исследован, но даже и не описан. Хотя частные случаи твердотельного осциллятора, конечно, рассматривались, например, при анализе ядерного магнитного резонанса, а также в многочисленных работах прикладного характера, но при малых углах поворота. Предложена (1997) постановка задачи динамики твердого тела на нелинейно упругом основании [1, 3, 6]. Введено общее определение потенциального момента. Даны примеры решения конкретных задач.

Впервые (1997) дана математическая постановка задачи о двухроторном гиростате на упругом основании [2, 4, 5]. Упругое основание определено заданием энергии деформации в виде скалярной функции вектора поворота. В конечном счете задача сведена к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих простую структуру, но достаточно сложную нелинейность. Отличие этих уравнений от традиционно используемых в динамике твердого тела в том, что при их написании не требуется вводить искусственных параметров типа углов Эйлера или параметров Кэли-Гамильтона. Рассмотрены решения конкретных задач. При этом на примере частного случая описан новый метод интегрирования основных уравнений. Решение получено в квадратурах для изотропного нелинейного упругого основания.

Модель абсолютно твердого тела обобщена (2003) на случай тела, состоящего не из материальных точек, а из тел-точек общего вида [7]. Рассмотрена модель квазитвердого тела, которое состоит из вращающихся частиц, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

1. Жилин П.А. Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на упругом основании // Тр. XXIV школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.-Петербург. 1997. С. 90–122.
2. Жилин П.А., Сорокин С.А. Мультироторный гиростат на нелинейно упругом основании // ИПМаш РАН: Препринт N 140. 1997. 83 с.
3. Zhilin P.A. A General Model of Rigid Body Oscillator // Proc. of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". Vol. 1. St.Petersburg. 1998. P. 288–314.
4. Zhilin P.A., Sorokin S.A. The Motion of Gyrostat on Nonlinear Elastic Foundation // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. **78**. (1998) S 2. P. 837–838.
5. Zhilin P.A. Dynamics of the two rotors gyrostat on a nonlinear elastic foundation // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **79**. (1999) S 2. P. 399–400.
6. Zhilin P.A. Rigid body oscillator: a general model and some results // Acta Mechanica. Vol. 142. (2000) P. 169–193.
7. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.

Динамика твердого тела на инерционном упругом основании

Проблемы создания высокооборотных центрифуг со скоростями вращения 120–200 тыс. об./мин потребовали создания усложненных механических моделей. В качестве такой модели выбрано твердое тело на упругом основании, причем параметры ротора и упругого основания таковы, что упругое основание уже нельзя считать безынерционным. Предложен (1995) метод [1, 2], позволяющий свести задачу к решению относительно простого интегро-дифференциального уравнения.

1. Жилин П.А., Товстик Т.П. Вращение твердого тела на инерционном стержне // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. N 458. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1995. С. 78–83.
2. Ivanova E.A., Zhilin P.A. Non-stationary regime of the motion of a rigid body on an elastic plate // Proc. of XXIX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg. 2002. P. 357–363.

Закон трения Кулона и парадоксы Пенлеве

Применение закона Кулона имеет свою специфику, связанную с неединственностью решения задач динамики. Показано (1993), что возникновение парадоксов Пенлеве связано с тем, что выдвигаются априорные допущения и о характере движения и

характере сил, требуемых для создания этого движения. Корректная же постановка задачи требует или определять силы по заданному движению, или определять движение по заданным силам [1, 2].

1. Жилин П.А., Жилина О.П. О законах трения Кулона и парадоксах Пенлеве // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1993. N 446. С. 52–81.
2. Wiercigroch M., Zhilin P.A. On the Painleve Paradoxes // Proc. of the XXVII Summer School “Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems”. St.Petersburg. 2000. P. 1–22.

Фундаментальные законы механики

Предложены (1994) формулировки основных принципов и законов эйлеровой механики [1–5] с явным введением в них спинорных движений. Все законы сформулированы для открытых тел, т. е. тел переменного состава, что оказывается чрезвычайно важным при описании взаимодействий макротел с электромагнитными полями. Кроме того, изменено в этих формулировках и само понятие тела, в которое включаются не только частицы, но и поля. Именно последние являются причиной необходимости рассмотрения тел переменного состава. Важность спинорных движений, в частности, определяется тем, что истинный магнетизм можно определить только через спинорные движения, в отличие от индуцированного магнетизма, порождаемого токами Фуко, т. е. трансляционными движениями.

Введен в рассмотрение (1994) новый исходный объект — тело–точка [1–5]. Относительно тела–точки предполагается, что оно занимает нулевой объем и его движение определено, если задан вектор положения и тензор поворота. Постулируется, что кинетическая энергия тела–точки есть квадратичная форма его трансляционной и угловой скоростей, а количество движения и собственный кинетический момент (динамический спин) определяются как частные производные кинетической энергии по вектору трансляционной скорости и вектору угловой скорости соответственно. Рассмотрена (2003) модель тела–точки [5], структура которого определяется тремя параметрами: массой, моментом инерции и дополнительным параметром q , условно названным зарядом, который никогда не встречался в частицах, используемых в классической механике. Показано, что движение этой частицы по инерции в пустоте представляет собой движение по спирали, а при определенных начальных условиях — по окружности. Таким образом, показано, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела–точки) по инерции не обязательно является прямолинейным.

Разработана (1994) концепция воздействий [1–5]. Концепция опирается на аксиому, которая дополняет принцип инерции Галилея, продолжая его на тела общего вида. Эта аксиома утверждает, что в инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными. Далее вводятся в рассмотрение силы и моменты, причем сила, действующая на закрытое тело, определяется как причина изменения количества движения этого тела, а момент, действующий на закрытое тело, — как причина

изменения кинетического момента. Пара векторов — вектор силы и вектор момента, называются воздействием.

Разработана (1994) концепция внутренней энергии тела [1–5], состоящего из тел-точек общего вида; сформулированы аксиомы, которым она должна удовлетворять. Принципиально новой является идея различать аддитивность по массе и аддитивность по телам. Кинетическая энергия тела аддитивна по массе этого тела, в то время как внутренняя энергия тела аддитивна по телам, составляющим рассматриваемое тело, но, вообще говоря, не является аддитивной функцией массы. В задаче Кейли разрешен парадокс, связанный с потерей энергии [5].

На элементарных примерах механики дискретных систем введены (2002) основные понятия термодинамики [4, 5]: внутренняя энергия, температура и энтропия. Определения понятий температуры и энтропии даны посредством чисто механических аргументов, основанных на использовании специальной математической формулировки уравнения баланса энергии.

1. Жилин П.А. Основные структуры и законы рациональной механики // Сб. докладов на 1-ом Всесоюзном совещании зав. каф. “Теорет. механика”, СПбГТУ, сент. 93. Изд. ВИКИ. 1994. С. 23–45.
2. Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики // Тр. XXII Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1995. С. 10–36.
3. Жилин П.А. Теоретическая механика. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 146 с.
4. Жилин П.А. Основные положения эйлеровой механики // Тр. XXIX школы-семинара “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2002. С. 641–675.
5. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.

Электродинамика

Показано [1, 2], что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразования Галилея, т.е. для них справедлив принцип относительности Галилея. Найдена полная группа линейных преобразований, относительно которых уравнения Максвелла ковариантны, и показано, что преобразования Лоренца являются весьма частным случаем полной группы.

Хорошо известна роль, которую играют электромеханические аналогии в аналитической механике материальных точек. Для уравнений электродинамики подобные аналогии в современной теоретической физике не только неизвестны, но даже и отрицаются. В работе [3] дана математически строгая механическая интерпретация уравнений Максвелла и показано, что они полностью идентичны уравнениям колебаний несжимаемой упругой среды. Отсюда следует, что в уравнениях Максвелла содержится бесконечная скорость распространения волн расширения, что находится в явном противоречии со специальной теорией относительности. Иными словами,

электродинамика Максвелла и СТО несовместимы. Хотя сказанное и находится в противоречии с современными концепциями физики, но отмеченные аналогии были установлены самим Максвеллом, правда в отсутствии зарядов, а в [3] строго доказаны в общем случае.

Предложены [3–5] модифицированные уравнения Максвелла, в которых все волны распространяются с конечной скоростью, одна из которых обязана быть выше скорости света в пустоте. Если сверхсветовую скорость устремить к бесконечности, то модифицированные уравнения переходят в уравнения Максвелла. Волны со сверхсветовой скоростью являются продольными. Не исключено, что именно эти волны объясняют экспериментально установленный факт наличия излучений, распространяющихся со сверхсветовой скоростью.

Установлено [3–5], что электростатические состояния на самом деле являются гиперсветовыми волнами и реализуются вдали от фронта волны.

Показано [3], что ни классические, ни модифицированные уравнения Максвелла не в состоянии правильно описать взаимодействие между электронами и ядром в атоме. Указан путь разрешения этой проблемы.

Показано [6], что математическое описание упругого континуума двухспиновых частиц специального вида сводится к классическим уравнениям Максвелла. Предложенная механическая аналогия позволяет однозначно утверждать, что вектор электрического поля аксиален, а вектор магнитного поля полярен.

1. Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. СПбГТУ. С.-Петербург. 1993. 40 с.
2. Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. N 448. С. 3–38.
3. Жилин П.А. Реальность и механика // Тр. XXIII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1996. С. 6–49.
4. Zhilin P.A. Classical and Modified Electrodynamics // Proc. of Int. Conf. “New Ideas in Natural Sciences”. St.Petersburg, Russia. June 17–22, 1996. Part I – Physics. P. 73–82.
5. Жилин П.А. Классическая и модифицированная электродинамика // Сб. трудов IV междунар. конф. “Проблемы пространства, времени и движения”, посвященной 400-летию Декарта и 350-летию Лейбница. С.-Петербург, 23–29 сент. 1996. С.-Пб. 1997. Т. 2. С. 29–42.
6. Zhilin P.A. The Main Direction of the Development of Mechanics for XXI century // Lecture prepared for presentation at XXVIII Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg, Russia. 2000. Current book. Vol. 2.

Квантовая механика

В конце прошлого века лорд Кельвин описал строение эфира, ответственного, по его мнению, за истинный (но не индуцированный) магнетизм. Среда (эфир) Кельвина весьма специфична: частицы этой среды не имеют трансляционных движений, но обладают спиновым движением. Однако математических уравнений такой среды лорд Кельвин написать не мог, т.к. в то время еще не был открыт носитель спинового движения, т.е. тензор поворота. В работе [1, 2] выведены основные уравнения среды Кельвина и показано, что они являются некой комбинацией уравнения Клейна-Гордона и Шредингера. При малых скоростях вращения частиц уравнения среды Кельвина сводятся к уравнению Клейна-Гордона, а при больших скоростях - к уравнению Шредингера. Весьма показательно то, что оба уравнения лежат в основаниях квантовой механики.

1. Жилин П.А. Реальность и механика // Тр. XXIII школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.-Петербург. 1996. С. 6–49.
2. Zhilin P.A. Classical and Modified Electrodynamics // Proc. of Int. Conf. "New Ideas in Natural Sciences". St.Petersburg, Russia. June 17–22, 1996. Part I – Physics. P. 73–82.

Общая теория неупругих сред

Предложен (2001–2005) общий подход [1–6] к построению теории неупругих сред. При этом главное внимание обращено на ясное введение основных понятий: мер деформаций, внутренней энергии, температуры и химического потенциала. Рассмотрены полярные и неполярные среды. Новизна предложенного подхода в следующем. Используется пространственное описание. Фундаментальные законы формулируются для открытых систем. Дается новая трактовка уравнения баланса энергии, причем энтропия и химический потенциал вводятся посредством чисто механических аргументов. Внутренняя энергия задается в форме, одновременно пригодной для газообразных, жидких и твердых тел. При этом фазовые переходы в среде описываются без привлечения каких-либо дополнительных условий, допускаются и твердотельные фазовые переходы. Рассматриваемые материалы имеют конечную прочность на разрыв. Это означает, что определяющие уравнения удовлетворяют условию сильной эллиптичности.

1. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Тр. XXVIII школы-семинара "Актуальные проблемы механики". С.-Петербург. 2001. С. 14–58.
2. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg. 2002. P. 36–48.
3. Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P. A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2003. Vol. 15. N 6. P. 539–570.

4. Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P.A. A micro-polar theory for binary media with application to flow of fiber suspensions // Proc. of XXX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg. 2003. P. 39–62.
5. Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // Успехи механики. Т. 2. N 4. 2003. С. 3–36.
6. Жилин П.А. К общей теории неупругих сред // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. N 489. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2004. С. 8–27.

Пространственное описание кинематики сплошной среды

При построении общей теории неупругих сред использовано (2001) так называемое пространственное описание [1–4], при котором в некоторой фиксированной области системы отсчета в разные моменты времени оказываются разные частицы среды. Благодаря использованию пространственного описания построена теория, в которой не используется концепция гладкого дифференцируемого многообразия. Ранее такие теории строились только для жидкостей и газов. Впервые подобная теория построена для твердых тел, в которых девиаторная часть тензора напряжений отлична от нуля. Впервые пространственное описание использовано применительно к среде, состоящей из частиц с вращательными степенями свободы. Дано новое определение материальной производной, содержащее только объективные операторы. Предложенное определение материальной производной при использовании подвижной системы координат не вступает в противоречие с принципом инерции Галилея [2]. Показано, что при пространственном описании применимы стандартные методы введения тензора напряжений и других подобных ему величин [1]. Уравнения динамики среды выведены исходя из фундаментальных законов, сформулированных для открытых систем. Устранена имеющаяся в литературе ошибка, возникающая при интегрировании дифференциального уравнения, выражающего закон сохранения частиц.

1. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Тр. XXVIII школы-семинара "Актуальные проблемы механики". С.-Петербург. 2001. С. 14–58.
2. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg. 2002. P. 36–48.
3. Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // Успехи механики. Т. 2. N 4. 2003. С. 3–36.
4. Жилин П.А. К общей теории неупругих сред // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. N 489. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2004. С. 8–27.

Теория деформаций

Обычно в нелинейной теории упругости теория деформаций строится как чисто геометрическая конструкция, при этом вводится в рассмотрение много разных тензоров

деформации и считается, что все они равноправны и любой из них может использоваться с одинаковым успехом. Однако, это не так. Показано (2001), что диссипативное неравенство накладывает такие ограничения на свободную энергию [1, 2], которые при использовании меры деформации Альманзи оказываются эквивалентными утверждению, что рассматривается изотропный материал. Иными словами, показано, что для анизотропных материалов свободная энергия не может быть функцией меры деформации Альманзи. Исходя из уравнения баланса энергии и диссипативного неравенства дано определение меры деформации. Показано, что в соответствии с данным определением мерой деформации является унимодулярный тензор.

1. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Тр. XXVIII школы-семинара “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2001. С. 14–58.
2. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg. 2002. P. 36–48.

Уравнение баланса массы и уравнение баланса частиц

Введены в рассмотрение (2002) две независимые функции состояния: плотность частиц и массовая плотность [1–3]. Такое разделение оказывается важным, например, когда материал имеет тенденцию к фрагментации, поскольку в этом случае масса сохраняется, а число частиц — нет. Проницаемость тел обусловлена плотностью частиц, а внутренние взаимодействия — плотностью массы. Введением функции распределения частиц, по существу, стерта грань между дискретными и сплошными средами. Сформулированы два независимых уравнения: уравнение баланса массы и уравнение баланса частиц. В уравнении баланса частиц фигурирует функция, определяющая скорость производства новых частиц; эта функция и по своему физическому смыслу отождествляется с химическим потенциалом. Уравнение баланса энергии также содержит члены, которые описывают формирование новых частиц или фрагментацию начальных частиц.

1. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg. 2002. P. 36–48.
2. Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // Успехи механики. Т. 2, N 4. 2003. С. 3–36.
3. Жилин П.А. К общей теории неупругих сред // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. N 489. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2004. С. 8–27.

Температура, энтропия и химический потенциал

С помощью специальной математической формулировки уравнения баланса энергии (2001), полученной посредством разделения тензоров напряжений на упругие и диссипативные составляющие, путем чисто механических аргументов введены в рассмотрение характеристики состояния, которые по своему физическому смыслу соот-

ветствуют температуре, энтропии и химическому потенциалу [1–4]. Исходя из требований второго закона термодинамики, на введенные характеристики наложены дополнительные ограничения, что и завершило их формальное определение. Получено приведенное уравнение баланса энергии, записанное относительно свободной энергии, главное назначение которого состоит в указании аргументов, от которых зависит свободная энергия. Важным является то обстоятельство, что нельзя сначала определить внутреннюю энергию, а затем энтропию и химический потенциал. Все эти понятия могут быть введены только одновременно. Для установления связи между внутренней энергией, энтропией, химическим потенциалом, давлением и т. д. служит приведенное уравнение баланса энергии. Показано, что свободная энергия является функцией температуры, плотности частиц и мер деформации, где все перечисленные аргументы независимы. Получены соотношения Коши-Грина, связывающие энтропию, химический потенциал и тензоры упругих напряжений с температурой, плотностью частиц и мерами деформации, так что для конкретизации определяющих уравнений требуется только задание свободной энергии.

Получены уравнения, характеризующие участие энтропии и химического потенциала в формировании внутренней энергии. Предложены определяющие уравнения для векторов потока энергии [3], которые в частном случае переходят в аналог известного закона Фурье-Стокса.

1. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Тр. XXVIII школы-семинара “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2001. С. 14–58.
2. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg. 2002. P. 36–48.
3. Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // Успехи механики. Т. 2. N 4. 2003. С. 3–36.
4. Жилин П.А. К общей теории неупругих сред // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. N 489. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2004. С. 8–27.

Теория консолидирующихся сыпучих сред

Построена (2001) общая модель сыпучей среды [1, 2], частицы которой могут слипаться (консолидироваться). Частицы среды обладают трансляционными и спинорными степенями свободы. Для изотропного материала в предположении малости перемещений и изотермичности процесса деформирования построена теория консолидирующихся сыпучих сред в замкнутой форме [1].

Показано, что допущение о том, что тензор вязких напряжений зависит от скорости, приводит либо к нарушению диссипативного неравенства, либо к нарушению гиперболичности [1]. Следовательно, это допущение неприемлемо. Вместо принятого в литературе тензора вязких напряжений введен в рассмотрение антисимметричный тензор напряжений [1], для которого считается справедливым закон сухого трения Кулона. Для тензора моментных напряжений принят закон вязкого трения, причем этот тензор также считается антисимметричным.

1. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Тр. XXVIII школы-семинара “Актуальные проблемы механики”. С.-Петербург. 2001. С. 14–58.
2. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg. 2002. P. 36–48.

Фазовые переходы и общая теория упруго-пластичных тел

Построена (2002) новая теория упругопластических тел, основанная на описании неупругих свойств посредством фазовых переходов в материале [1–3]. Дано определение фазового перехода. Это сделано следующим образом. С понятием плотности частиц связаны две характеристики материала: компактность, определяемая как произведение количества частиц в единице объема на объем частицы, и пористость, определяемая как единица минус компактность. Твердое тело имеет несколько стабильных состояний, соответствующих разным значениям компактности. Переход из одного стабильного состояния в другое — это типичный фазовый переход. Предложено определяющее уравнение, описывающее характер изменения компактности вблизи точки фазового перехода.

Предложено определяющее уравнение для упругого давления [1], которое хорошо описывает не только газы и жидкости, но и твердые тела с фазовыми переходами. При этом материал имеет конечную прочность на разрыв. Различие между твердыми и жидкими телами заключается, главным образом, в их реакции на изменение формы. Описать эту реакцию можно, только приняв во внимание девиатор тензора напряжений. При классическом подходе девиатор тензора упругих напряжений, который по определению не зависит от скоростей, при описании неупругих свойств материала игнорируется. Для твердых тел это неприемлемо. Одна из задач теории заключается в определении строения внутренней энергии, которое должно отражать наличие многих твердотельных фаз. Большинство фазовых переходов в твердых телах связано с тем фактом, что максимальные сдвиговые (касательные) напряжения в материале имеют довольно низкий верхний предел. Предложены определяющие уравнения для девиатора тензора напряжений [1], в которых модуль сдвига зависит от параметров состояния (температуры, массовой плотности, деформации).

1. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // Proc. of XXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg. 2002. P. 36–48.
2. Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // Успехи механики. Т. 2. N 4. 2003. С. 3–36.
3. Жилин П.А. К общей теории неупругих сред // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. N 489. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2004. С. 8–27.

Микрополярная теория бинарной среды

Построена (2003) микрополярная теория бинарной среды [1, 2], состоящей из частиц жидкости и фибр. Жидкость считается вязкой неполярной, но с несимметричным тензором напряжений. Состояние фибр описывается с помощью антисимметричного тензора напряжений и антисимметричного тензора моментных напряжений. Принимаются во внимание силы вязкого трения. Второй закон термодинамики формулируется в виде двух неравенств, в предположении, что составляющие бинарной среды могут иметь разные температуры.

1. Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P. A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2003. Vol. 15. N 6. P. 539–570.
2. Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P.A. A micro-polar theory for binary media with application to flow of fiber suspensions // *Proc. of XXX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. St.Petersburg. 2003. P. 39–62.

Развитие математического аппарата

Разработана теория симметрии тензорных величин, допускающая корректное рассмотрение аксиальных (неевклидовых) тензоров. Дано (2005) новое определение тензорных инвариантов [1, 2]. Это определение совпадает с традиционным только для евклидовых тензоров. Показано, что любой инвариант является решением некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Число независимых решений этого уравнения определяет минимальное число инвариантов, необходимых для фиксации системы тензоров как твердого целого.

1. Жилин П.А. Модифицированная теория симметрии тензоров и их инвариантов // *Нелинейные проблемы механики сплошных сред: Изв. высш. учеб. зав. Северо - Кавказский регион. Естественные науки (2003)*. Спецвыпуск. С. 176–195.
2. Zhilin P.A. Symmetries and Orthogonal Invariants in Oriented Space // *Proc. of XXXII Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. St.Petersburg. 2005. P. 470–483.

Пьезоупругость

Получены (2002–2005) уравнения пьезоупругости [1, 2], содержащие несколько разных теорий, две из которых новые. В основе предлагаемой общей теории лежит модель микрополярного континуума. Основные уравнения выводятся из фундаментальных законов механики Эйлера и содержат несимметричные тензоры силовых и моментных напряжений.

1. Kolpakov Ja. E., Zhilin P.A. Generalized continuum and linear theory of the piezoelectric materials // *Proc. of XXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. St.Petersburg. 2002. P. 364–375.
2. Zhilin P.A., Kolpakov Ya.E. A micro-polar theory for piezoelectric materials // *Lecture at XXXIII Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”*. St.Petersburg, Russia. 2005. Current book. Vol. 2.

Ферромагнетизм

Предложена (1998–2001) теория ферромагнетизма [1–3], которая при определенных частных предположениях сводится к известным уравнениям, описывающим поведение ферромагнетиков. Уравнения предлагаемой теории выводятся из фундаментальных законов механики Эйлера, в основе теории лежит модель среды Кельвина. В отличие от известных теорий, предлагаемая теория описывает явление магнитоакустического резонанса.

1. Grekova E.F., Zhilin P.A. Ferromagnets and Kelvin's Medium: Basic Equations and Magnetoacoustic Resonance // Proc. of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". Vol. 1. St.Petersburg. 1998. P. 259–281.
2. Грекова Е.Ф., Жилин П.А. Уравнения упругих нелинейных полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики // Нелинейные проблемы механики сплошных сред: Изв. высш. учеб. зав. Северо - Кавказский регион. Естественные науки (2000). Спецвыпуск. С. 24–46.
3. Grekova E.F., Zhilin P.A. Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // Journal of elasticity. Vol. 64. (2001) P. 29–70.

Составители: Е.А. Иванова, Д.А. Индейцев, А.М. Кривцов.

Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики*

Аннотация

Доклад содержит обсуждение современных трактовок основных понятий механики. Эти трактовки по форме, а иногда и по существу, отличаются от приводимых в учебниках механики. Хотя вводить какие бы то ни было модификации в устоявшиеся каноны крайне нежелательно и даже вредно, тем не менее в любой развивающейся науке наступает момент, когда модификации необходимы. Важно только, чтобы эти модификации не вступали в противоречие с уже доказанными положениями и не отрицали ничего из достигнутого ранее. В частности, эйлерова механика включает в себя все достижения ньютоновой механики и добавляет к ней важные новые возможности, расширяющие сферу приложения механики.

1 Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена единоличных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительно отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удастся только на больших интервалах времени. Революция в физике, произошедшая в начале XX века, не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики из-за их логической незавершенности. С другой стороны, к

*Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики // Труды XXII летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1995. С. 10–36.

концу XIX века уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то не достает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затушевать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуры механики. Другим фактом являлось “печальное поведение” (выражение А.Ю.Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Сказанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX века начало развиваться некое расширение классической механики, связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинорных движений. Без последних, по воззрениям Дж.Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Другой важной особенностью, не учитываемой классической механикой, является отсутствие в ней понятия излучения, с помощью которого описывается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Описанные и некоторые другие особенности классической механики были почему-то объявлены органическими пороками классической механики и новейшая физика заявила о “решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира”. Здесь не место вдаваться в дискуссии. Замечу только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики. Цель данного краткого сообщения как раз и состоит в том, чтобы дать набросок взглядов современной рациональной механики. Огромный вклад в формирование этих взглядов внес Леонард Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. В заключение этого пункта отмечу, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное ниже ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Я вполне убежден, что так называемая шестая проблема Гильберта принципиально не допускает решения.

2 Пространство, время, движения

2.1 Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [1]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток, пространстве невозможно обнаружить движение, равно как невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотренное вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O , и тремя некопланарными “векторами” e_k , то есть тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот

репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. “Векторы” \mathbf{e}_k нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются. Зато существование “векторов” \mathbf{e}_k позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно “векторов” \mathbf{e}_k определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \leq x^k \leq \infty$, ($k = 1, 2, 3$), где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{e}_k \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty. \quad (1)$$

Будем считать, что вектор \mathbf{r} , отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k , определяет точку, фиксированную относительно репера репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение “векторов” \mathbf{e}_k

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m| |\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \quad (2)$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, то есть имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками А и В по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn} (x_A^m - x_B^m) (x_A^n - x_B^n). \quad (3)$$

Числа x_A^k называются координатами точки А. Вершине репера отвечают координаты $x_A^k = 0$.

Определение 2.1: репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек (1) называется телом отсчета.

Сам репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x_A^k называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но об этом будет сказано позднее. Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета, и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны. Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t , называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И.Ньютон писал [2], с.45: “Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время” . . . под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время”.

Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак ни на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX века в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л.Больцманом: “Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы назвали временем” [3], с.8. Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П.Боль среди таких проблем указал следующую: “Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь” [4], с.198. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д.Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже (1900 г.) при формулировке им 6-ой проблемы. Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы в многих работах А.Пуанкаре — см., например, [5]. Удивительно, что эти исследования до их пор либо вообще игнорируются, либо очевидным образом искажаются. Если говорить о времени, то согласно А.Пуанкаре, главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных интервалов времени, т.е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т.е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечу только, что в данной работе я следую классическим традициям.

Определение 2.2: Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Можно ввести сколько угодно систем отсчета и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т.е. ее вектор положения \mathbf{r}_A задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное выше, определено с точностью до преобразования $t \rightarrow \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Из сказанного следует, что введенные выше системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

2.2 Принцип инерции Галилея. Инерциальные системы отсчета. Абсолютное пространство-время

Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех ее понятий, является принцип инерции Галилея (**GPI**). Отказ от этого принципа разрушает все здание классической физики.

Аксиома A1 (GPI): всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Понятно, что **GPI** не является аксиомой в традиционном смысле, ибо использует не определенные заранее понятия: абсолютное пространство, прямолинейное и равномерное движение. Фактически **GPI** дает только идею введения этих понятий, причем **GPI** принципиально не может быть подтвержден или опровергнут экспериментально, что и придает ему непреходящую ценность. Прежде всего, **GPI** дает нам некое эталонное движение. А именно, движение изолированной частицы **называется** прямолинейным и равномерным (в воображаемом абсолютном пространстве невозможно дать определение прямой линии). В теле отсчета понятие прямой линии уже определено, Поэтому их всех мыслимых тел отсчета можно отобрать кандидатов на роль абсолютного пространства.

Определение 2.3: тело отсчета называется инерциальным, если траектория любой изолированной частицы есть прямая линия в этом теле отсчета.

Инерциальных тел отсчета бесконечно много. Они движутся друг относительно друга и различаются масштабами расстояний (матрицами g_{mn}). Важно, что при отборе инерциальных тел отсчета не используется понятие времени.

Определение 2.4: множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.

Определение 2.5: часы называются оттарированными в соответствии с **GPI**, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в инерциальном теле отсчета.

Легко убедиться, что время, измеряемое по различным часам, оттарированным по Галилею, определено с точностью до линейного преобразования: $t \rightarrow kt + t_0$, где k определяет масштаб измерения времени, а t_0 — начало отсчета.

Определение 2.6: инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными по Галилею, называется инерциальной системой отсчета.

Определение 2.7: множество инерциальных систем отсчета называется абсолютным пространством-временем классической физики.

Из сказанного выше очевидно, что в классической физике пространство-время образует единое четырехмерное пространство, т.е. в нем пространственно-временные отношения не являются независимыми, как это утверждается в новейшей физике.

Замечание. Аксиоматическое введение времени детально обсуждается в работе С.Зарембы [7]. Более детальное изложение содержания этого и следующего пунктов можно найти в работе [8].

2.3 Системы отсчета и системы координат. Принцип объективности

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

Определение 2.8: система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \quad \Longrightarrow \quad x' = x'(y', t). \quad (4)$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \quad \Longrightarrow \quad y^m = y^m(y', t). \quad (5)$$

где как бы забыто о существовании формул (4). Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (5), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

Аксиома А2: Принцип объективности: все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т.д.) зависят от выбора системы отсчета. Недопустимо поэтому смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются [8], где также вводятся инвариантные дифференциальные операторы.

2.4 Трансляционные и спинорные движения. Спин-векторы и аксиальные векторы. Ориентация системы отсчета. Описание спинорных движений

Существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые ниже спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми

аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору \mathbf{a}_* сопоставляется “обычный” вектор \mathbf{a} :

- 1) \mathbf{a} : расположен на оси спин-вектора \mathbf{a}_* ,
- 2) модуль \mathbf{a} равен модулю \mathbf{a}_* ,

3) \mathbf{a} направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

“Обычные” векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Спинорные движения определяются заданием собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(t) = +1. \quad (6)$$

Тензор $\mathbf{P}(t)$ ниже будет называться тензором поворота [9]. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от \mathbf{E} , однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(t) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (7)$$

где единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$, является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(t)$, т.е. $\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}(t)$, а угол $\theta = \theta(t)$ называется углом поворота. Вектор $\Theta = \theta(t)\mathbf{m}(t)$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(t) = \exp[\Theta \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{R} = \Theta \times \mathbf{E}, \quad (8)$$

тензор $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T$ называется логарифмическим тензором поворота. Представление (1) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина: $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$ — левый тензор спина и $\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}}$ — правый тензор спина. Оба тензора спина кососимметричны и имеют сопутствующие векторы: $\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$, $\mathbf{S}_r = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (9)$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Подробнее о тензоре поворота и его представлениях можно ознакомиться по работам [8,9].

3 Тела и их динамические структуры

3.1 Тела–точки и их размерность

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Уже одно это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютоновскую) механику, т.к. материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело–точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела–точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела точки определено, если задан его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела–точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_{\times}, \quad ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (10)$$

Аксиома Т1: кинетическая энергия тела–точки есть квадратичная форма его скоростей

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (11)$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела–точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства. Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота.

Представление (11) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела–точки. Тогда (11) принимает вид $2K = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{v}$. Положим здесь $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ и получим $2K = mv^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{n}$. Примем теперь во внимание, что тело отсчета изотропно, т.е. телу–точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только тогда, когда выполняется равенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{n}$. Это равенство, в свою очередь, выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_0 = \alpha \mathbf{E}$, где множитель α можно положить равным единице, т.к. у нас уже выделен скалярный множитель m . К сожалению, это рассуждение неправильно и равенство $\mathbf{A}_0 = \alpha \mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать. Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (12)$$

где \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{C}_0 — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях t_0 , при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$. Формулы (12) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности. С учетом вышеприведенных рассуждений и (12) получаем, что тензор инерции \mathbf{A} равен единичному, а представление (11) принимает вид

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (13)$$

где скалярный множитель m называется массой тела–точки.

Представление (13) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. В самом деле, допустим, например, что тело–точка это электрон. Тогда все наше рассуждение теряет силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$ всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного. Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (13) является приемлемым, но для легких частиц, например, для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (11), где множитель m лучше уже не выделять. При использовании (11) массой тела–точки удобнее называть величину $1/3 \operatorname{tr}(m\mathbf{A})$. К сожалению, здесь не время и не место обсуждать многочисленные нюансы, заключенные в представлении (11). В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ и (12). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (11) положительной определенности. Однако, возможно, что можно требовать выполнения только более слабого неравенства

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} K dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}: \quad |\mathbf{v}| \neq 0, |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \quad (14)$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (11), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение 3.1: число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела–точки и не зависящий от движения тела–точки, называется размерностью тела–точки.

Размерность материальной точки равна единице $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, \mathbf{C} — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае, размерность частицы (11) равна 12, а тела–точки (13) — 10.

Определение 3.2: количеством движения \mathbf{K}_1 тела–точки называется линейная форма скоростей

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (15)$$

Определение 3.3: кинетическим моментом \mathbf{K}_2^Q тела–точки, вычисленным относительно опорной точки Q , зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = m [(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (16)$$

Первое слагаемое в данной формуле называется моментом количества движения тела–точки, а второе слагаемое, т.е. величина $m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела–точки.

В заключение¹ этого пункта приведем пример воображаемого тела–точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + q\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (17)$$

где m — масса тела–точки, J — момент инерции, q есть новый параметр, который не встречается в телах–точках, используемых в классической механике. Иными словами, параметр q определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером я хочу подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, но они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело–точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “очарование”, “заряд” и т.д., то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Количество движения и кинетический момент тела–точки (17) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times (m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}) + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega}. \quad (18)$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забегав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения

$$m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega} = m\mathbf{V}_0 + q\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad \mathbf{R} \times \mathbf{a} + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{V}_0 + J\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}. \quad (19)$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(J - \frac{q^2}{m} \right) \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \frac{qa}{m} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1. \quad (20)$$

Решение этого уравнения ищем в виде прецессирующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (21)$$

Подставляя это выражение в (20) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qa}{q^2 - mJ} \equiv \alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha t. \quad (22)$$

Интегрируя уравнения (18), нетрудно найти все искомые характеристики движения:

$$m\mathbf{R}(t) = (a - q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})t\mathbf{e} + qa\alpha^{-1}\mathbf{e} \times \mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}]. \quad (23)$$

¹Этот пример, наряду с другими иллюстрациями “немеханического” содержания, был исключен автором из основного текста доклада и, соответственно, из публикации.

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{a} = q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости имеем выражение

$$m \mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t \mathbf{e}) \cdot (\alpha \mathbf{e} - q \boldsymbol{\omega}_0). \quad (24)$$

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т.е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела–точки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные, возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее, они не более неправдоподобны, чем те “чудеса”, которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спинорных движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота \mathbf{Q} , а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела–точки.

3.2 Тела и их динамические структуры

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел–точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами–точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во–первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел–точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во–вторых, первичные тела–точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В–третьих, и это главная проблема, первичные тела–точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела–точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела–точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел–точек мы получили n первичных тел–точек. О том почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел–точек будет немного сказано при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего

времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать отдельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее, в данной работе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена выше. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова \mathbb{S}_t , которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на \mathbb{S}_t нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение 3.4: множество \mathfrak{M}_A тел-точек, находящихся внутри \mathbb{S}_t , называется телом A , а множество \mathfrak{M}_A^e тел-точек, находящихся вне \mathbb{S}_t , называется окружением тела A и обозначается A^e .

Объемом тела A называется объем, заключенный внутри \mathbb{S}_t , поэтому объем тела A не является физической (объективной) характеристикой тела A .

Определение 3.5: тело A называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением: в противном случае тело A называется открытым.

Аксиома T2: кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела A аддитивны по телам-точкам, составляющим тело A .

Пусть все характеристики i -го тела-точки снабжаются индексом i . Тогда в соответствии с аксиомой **T2** имеем

$$K(A) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_A} m_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right) = \sum_i m_i K_i \quad (25)$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии. Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(A) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (26)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(A) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (27)$$

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение 3.6: совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом A , если выполняются следующие два условия: первое — для любых пар точек A_i и A_m , принадлежащих телу A и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|; \quad (28)$$

второе — тензоры поворота всех тел-точек одинаковы

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) = \mathbf{P}(t), \quad (29)$$

причем $\mathbf{P}(t)$ называется тензором поворота тела \mathcal{A} .

Из (28) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i(0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad (30)$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X , называемой полюсом, зафиксированным в теле \mathcal{A} . Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i(t)$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} в виде

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m \dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) &= (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (31)$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(t)$, \mathbf{B}_X и \mathbf{C}_X — тензоры инерции тела \mathcal{A} , определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_X &= m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} = \mathbf{P}(t) \cdot [m (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{P}^T(t), \\ \mathbf{C}_X &= \mathbf{P}(t) \cdot \left\{ \sum_i m_i [(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \otimes (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)] \right\} \cdot \mathbf{P}^T(t). \end{aligned} \quad (32)$$

В (31), (32) через m обозначена масса тела \mathbf{A} , через $\mathbf{R}_X(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела \mathbf{A}

$$m = \sum_i m_i, \quad \mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{R}_i(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела \mathcal{A} , то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор \mathbf{C} называется центральным тензором инерции. В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К.Трусделл и Р.Тупин [11] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но автор полагает, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (11), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т.е. вернуться к языку, которым пользовался Л.Эйлер.

4 Воздействия. Силы и моменты. Основные аксиомы

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л.Эйлера [12]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями, и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, продолжая его на тела общего вида.

Аксиома F0: в инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело \mathcal{A} движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Аксиома F1: в инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела \mathcal{A} обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующей на тело \mathcal{A} со стороны его окружения \mathcal{A}^e .

Аксиома F2: в инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела \mathcal{A} , вычисленного относительно опорной точки Q , обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело \mathcal{A} со стороны его окружения \mathcal{A}^e .

При этом момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} , вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad (33)$$

где \mathbf{R}_Q определяет положение опорной точки Q ; вектор \mathbf{R}_P — определяет произвольно выбираемую точку \mathcal{B} , называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственным моментом — он зависит от выбора точки приведения P , но не зависит от выбора опорной точки Q . Полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела \mathcal{B} на изменение положения тела \mathcal{A} ;

б) момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела \mathcal{B} на повороты тела \mathcal{A} вокруг точки приведения P .

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел \mathcal{A} и \mathcal{B} , 2) мысленно “заморозить” тело \mathcal{A} и превратить его в абсолютно твердое, 3) мысленно придавать всем точкам \mathcal{A} всевозможные бесконечно малые смещения $\xi \mathbf{e}$, где \mathbf{e} , произвольный единичный вектор. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным смещениям тела \mathcal{A} , то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление \mathbf{e}_* , что тело \mathcal{B} не препятствует смещению тела \mathcal{A} в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_* равна нулю. Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела \mathcal{A} , т.е. тело \mathcal{A} и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P ; 4) мысленно поворачивать тело \mathcal{A} вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi \mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным поворотам тела \mathcal{A} , то $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на \mathbf{e}_{**} , что тело \mathcal{B} не препятствует повороту тела \mathcal{A} вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_{**} равна нулю.

Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (34)$$

Определение 4.1: пара векторов $\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$ называется воздействием тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} .

Определение 4.2: воздействие тела на тело \mathcal{A} называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_P(t)$, что при любых движениях тела \mathcal{A} воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} определяется заданием пары векторов

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); (\mathbf{R}_P(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}, \quad (\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}), \quad (35)$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела \mathcal{A} . Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи. Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение 4.3: воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} называется чисто моментным, если $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие

этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело \mathcal{B} , так и по телам, составляющим тело \mathcal{A} .

Аксиома F3: Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отделенным телам \mathcal{C} и \mathcal{D} , составляющим тело \mathcal{B} : $\mathcal{B} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (36)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (37)$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (37). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ может производиться независимо.

Аксиома F4: сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отделенным телам \mathcal{C} и \mathcal{D} , составляющим тело \mathcal{A} : $\mathcal{A} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (38)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (39)$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

Примечания.

1 В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно сказанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

2. Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

5 Полная и внутренняя энергия. Мощность внешних воздействий

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г.В.Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т.е. не было самостоятельной структурой. В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839г. Дж.Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред. Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г.Гельмгольца [13]

и А.Пуанкаре [5]. Однако итог этого анализа малоутешителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. Цель данного пункта не в прояснении концепции энергии, а в подчеркивании роли энергии, как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела \mathcal{A} есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Уже само существование тел в виде нераспадающихся объектов указывает на присущее им “нечто”, что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это “нечто” можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела \mathcal{A} представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \quad (40)$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела \mathcal{A} и требует определения. Здесь-то и возникают проблемы, причем весьма запутанные и трудные. Простейшая из них состоит в следующем. С одной стороны, внутренняя энергия не должна зависеть от скоростей, так как скорости включены в кинетическую энергию, а также по целому ряду других более важных соображений. С другой стороны, внутренняя энергия просто обязана зависеть от каких-то скоростей. Например, внутренняя энергия зависит от температуры, а последняя (как принято считать), характеризует меру хаотических микродвижений тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} . Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома E1: внутренняя энергия тела \mathcal{A} зависит только от конфигурации тела \mathcal{A} , т.е. только от векторов положения \mathbf{R}_i и тензоров поворота \mathbf{P}_i тел-точек \mathcal{A}_i , составляющих тело \mathcal{A}

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \dots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N). \quad (41)$$

Аксиома E2: внутренняя энергия тела \mathcal{A} аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело \mathcal{A}

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\bigvee_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varphi_{i,k}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k), \quad \varphi_{i,i}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i) = 0. \quad (42)$$

Эта аксиома часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (41). Не доказано, но по всей видимости аксиома (42) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий.

Аксиома E3: внутренняя энергия тела \mathcal{A} является индифферентным скаляром, т.е. она не зависит от выбора системы отсчета.

Аксиома ЕЗ: внутренняя энергия тела \mathcal{A} не изменится, если на движение тела \mathcal{A} наложить дополнительное движение тела \mathcal{A} , как жесткого целого.

Последние две аксиомы эквивалентны. Следствием аксиом Е1–ЕЗ являются утверждения:

а) внутренняя энергия тела \mathcal{A} , являющегося системой материальных точек, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k} (|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|); \quad (43)$$

б) внутренняя энергия тела \mathcal{A} , состоящего из тел-точек общего вида, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k} (\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k); \mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k). \quad (44)$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (44), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\Psi_{i,k}$ в (43) приведем такую

$$\Psi(r) = \Psi_0 e^{-r_0/r} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^m - \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \right], \quad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|. \quad (45)$$

где Ψ_0 , r_0 , r_1 , m , n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние не однотипны.

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и обе весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (45) переходит в потенциал Леннарда-Джонса. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (45) вновь совпадает с потенциалом типа Леннарда-Джонса. На первый взгляд потенциал типа (45) кажется странным, т.к. он допускает “слипание” тел-точек. Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев сильно помогает. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, т.к. они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений. Поэтому здесь я ограничусь приведенными выше намеками.

В заключении этого пункта примем

Определение 5.1: мощностью внешних воздействий на тело \mathcal{A} , состоящего из тел-точек \mathcal{A}_i , называется форма

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} \varphi_{i,k} \left[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right]. \quad (46)$$

Обратим внимание, что здесь включены силы и моменты, действующие на тело-точку со стороны окружения всего тела \mathcal{A} , а не со стороны \mathcal{A}_i^e , т.е. окружение i -го тела-точки. Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбран вектор положения \mathbf{R}_i тела-точки \mathcal{A}_i , причем, напомним, $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q .

6 Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают уравнения баланса количества движения, кинетического момента и энергии. В механике сплошных сред к ним добавляют неравенство производства энтропии, т.е. второй закон термодинамики, который ниже не обсуждается. Следует подчеркнуть, что фундаментальные законы вовсе не являются законами Природы типа закона Всемирного тяготения. Фундаментальные законы — суть метод изучения Природы. Они могут оказаться неудобными, но они никогда не могут быть неправильными. Именно поэтому я уверен, что они действуют на всех уровнях от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы суть следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

6.1 Первый фундаментальный закон или уравнение баланса количества движения

Скорость изменения количества движения тела \mathcal{A} равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$ в тело \mathcal{A}

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}). \quad (47)$$

Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$, как правило, равна нулю. Для материальной точки уравнение (47) есть второй закон Ньютона. Для закрытых тел уравнение (47) называют первым законом динамики Эйлера, открытым им в 1750 году. Из (47) и принятых аксиом для сил немедленно следует третий закон Ньютона $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. Уравнение И.В. Мещерского есть просто запись уравнения (47).

Замечание: в физике весьма популярно мнение, что силой называется то, что стоит в правой части уравнения (47). Это заблуждение является источником многих недоразумений. Например, многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. Однако в эйлеровской механике третий закон Ньютона уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Противоречие возникает из-за того, что в микромире часто нельзя игнорировать скорость подвода количества движения в тело. Поэтому правую часть уравнения (47) нельзя называть силой.

У начинающих часто возникает затруднение с тем, как следует вычислять скорость подвода количества движения в тело. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя на интуитивном уровне он вполне очевиден.

6.2 Второй фундаментальный закон или уравнение баланса кинетического момента

Скорость изменения кинетического момента тела \mathcal{A} , вычисленного относительно опорной точки Q , равна моменту $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода кинетического момента $\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})$ в тело \mathcal{A}

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}). \quad (48)$$

Этот закон для закрытых тел ($\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$) впервые был открыт Л.Эйлером в 1776 году и носит название второго закона динамики Эйлера. В менее отчетливой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 году при формулировке уравнений динамики твердого тела. Применительно к системе материальных точек он позволяет доказать, что внутренние силы в такой системе по необходимости являются центральными. Поэтому в ньютоновской механике никаких сил, кроме центральных, не существует.

6.3 Третий фундаментальный закон или уравнение баланса энергии

Скорость изменения полной энергии тела \mathcal{A} равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “немеханического” происхождения, т.е. энергии, подводимой к телу не через мощность внешних воздействий

$$\dot{E}(\mathcal{A}) = \dot{K}(\mathcal{A}) + \dot{U}(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}) + k_3(\mathcal{A}). \quad (49)$$

Определение: закрытое тело называется замкнутым, если оно обменивается энергией со своим окружением не иначе, как через мощность внешних сил; для замкнутого тела $k_3(\mathcal{A}) = 0$.

В классической механике, как правило, рассматриваются закрытые тела. Исключение составляют задачи для реактивного движения и задачи типа падающей цепочки. Однако существует много задач, где рассмотрение открытых тел оказывается весьма важным, но соответствующий анализ еще не проведен. К ним относятся задачи механики неупругих сплошных сред, а также те проблемы физики, где необходим учет излучения, например, проблемы атомной физики.

7 Заключение

Выше сформулированы основные понятия эйлеровой механики и показаны ее отличительные черты. Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютоновская механика. В этих случаях эйлеровская механика едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновской механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлеровская механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике.

Список литературы

- [1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Собр. трудов А.Н.Крылова, т. VII, М.-Л. ИАН СССР, 1936.

- [2] Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. – В кн. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937, с.25-166.
- [3] Boltzmann L. Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik Teil I. Leipzig; 1897, 241s.
- [4] Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. – Собр. тр. (Под ред. Л.Э.Рейзиня.) Рига: Зинатне, 1974, с.73-198.
- [5] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, 560с.
- [6] Пуанкаре А. Измерение времени. Избр. труды А. Пуанкаре, т.III, с.419–428. М.: Наука, 1974. 771с.
- [7] Zaremba S. Réflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle. – Enseignement Math., 1940, t.38, p.59-69
- [8] Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. Тр. СПбГТУ, N448, С.-Пб.: 1994, с.3-38.
- [9] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематике твердого тела. Тр. СПбГТУ, N443, С.-Пб.: 1992, с.100-121.
- [10] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**, pp.187-204.
- [11] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, Encyclopedia of Phycics. Springer - Verl, 1960 vol s/1
- [12] Эйлер Л. Основы динамики точки. М.-Л.: ГИТТЛ, 1938, 500с.
- [13] Гельмгольц Г. О сохранении силы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1934, 143с.

Реальность и механика*

Аннотация

Главная цель данного доклада привлечь внимание ученых-механиков к анализу фундаментальных проблем в электродинамике и теории атома. Для решения этих проблем могут использоваться концепции различного рода эфиров. Эти концепции описывались многими великими учеными (Пифагор, Платон, Аристотель, Ньютон, Эйлер, Фарадей, Максвелл и др.) В частности, в докладе показано, что так называемый первый эфир является сплошной средой специального вида. Распространение возмущений в первом эфире описывается уравнениями, которые представляют собой некоторую комбинацию уравнений Шредингера и Клейна-Гордона. Таким образом, дана строгая механическая интерпретация уравнения Шредингера. Так называемый второй эфир является электромагнитным состоянием материи. В докладе детально обсуждается классическая электродинамика Максвелла. Показано, что в общем случае уравнения Максвелла не имеют решения. Если же решение существует, то оно состоит из двух частей: а) волновая часть, б) электростатическая часть, которая мгновенно распространяется на все пространство. Это означает, что уравнения Максвелла содержат две скорости распространения волн, причем одна из них бесконечна. Следовательно, электродинамика Максвелла не совместима со специальной теорией относительности. Предлагаемая механическая интерпретация уравнений Максвелла немедленно приводит к модифицированным уравнениям Максвелла, обладающим следующими свойствами: 1) решение этих уравнений существует всегда, 2) скорости распространения сигналов конечны, 3) решение модифицированных уравнений стремится к решению классических уравнений при стремлении второй скорости к бесконечности, 4) если скалярный потенциал равен нулю, то оба решения в точности совпадают. В конце шестого параграфа показано, почему как классическая, так и модифицированная электродинамика не позволяют правильным образом описать структуру атома. Иллюстративные задачи показывают разницу между классической и модифицированной системами.

1 Механика и новейшая физика

Конец столетия можно считать подходящим поводом для обсуждения роли, места и назначения механики в современном естествознании. На рубеже XIX и XX веков механика составляла фундамент всей физики и преодолевала все возникающие

*Жилин П.А. Реальность и механика // Труды XXIII летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1996. С. 6–49.

препятствия. Ярким свидетельством тому явилась кинетическая теория газов. Существовали, впрочем, проблемы, которые лорд Кельвин в своей лекции “Тучи XIX века над динамической теорией теплоты и света”, прочитанной 27 апреля 1900 года, охарактеризовал следующими словами [1, с. 25-26]: “Красота и ясность динамической теории, согласно которой теплота и свет являются формами движения, в настоящее время омрачены двумя тучами. Первая из них — это вопрос: как может Земля двигаться сквозь упругую среду, какой по существу является светоносный эфир? Вторая — это доктрина Максвелла-Больцмана о распределении энергии”. Не обсуждая самой постановки вопросов, укажем, что в начале XX века были найдены пути преодоления этих затруднений, но они уводили далеко за пределы классической механики. Так возникла новейшая физика, которая заявила о “решительном разрыве с классической механикой”. Например, Л.И.Мандельштам пишет [2, с. 85]: “Неправильно полагать, что теория относительности перевернула наши понятия о времени и пространстве в том смысле, что на место старых и четких понятий она поставила такие же новые. Это не так. Одна из больших заслуг теории относительности состоит в том, что она показала, что основные понятия, которыми оперировали раньше, — во всяком случае в известной своей части — вовсе не были определены, что многие высказывания вообще не имели смысла”. Высказываний подобного рода можно привести сколько угодно. Поэтому кажется необходимым дать хотя бы краткое сравнение исходных положений, принятых в механике и новейшей физике. Однако прежде, чем проводить какие бы то ни было сравнения, следует четко изложить взгляд механиков на механику, ибо то, как трактуется механика физиками — см., например, работу А.Эйнштейна [3] — мало похоже на механику.

Механика — это не теория какого бы то ни было явления Природы, но метод исследования Природы. В основах механики нет ни одного закона, который хотя бы в принципе мог быть опровергнут экспериментально. В фундаменте механики лежат логические утверждения, выражающие условия баланса неких величин и которые сами по себе не достаточны для построения замкнутых теорий. Для этого необходимо привлекать дополнительные законы, типа закона всемирного тяготения, рассматриваемые как экспериментально установленные факты. Эти дополнительные законы могут оказаться недостаточными или даже ошибочными, но отказ от них не влияет на метод механики. Упомянутая незамкнутость механики может, конечно, восприниматься как ее недостаток людьми, которые полагают, что человечество близко к конечному познанию Мироздания. Те же, кто способен увидеть Реальность, понимают, как бесконечно далеки люди от возможности правильно описать даже относительно простые проявления Реальности. Поэтому корректный метод изучения Природы по необходимости должен включать в себя заранее неопределенные элементы, манипулируя которыми можно улучшать те или иные теории разного рода явлений и тем самым расширять наши представления о Реальности. Механика устанавливает определенные ограничения на допустимую структуру этих неопределенных элементов, но сохраняет в них достаточно широкий произвол.

После этих кратких замечаний о методе механики полезно сравнить современные позиции механики и новейшей физики, возникшие через 70 лет после объявления физикой о “решительном разрыве с классической механикой”. Краткую сводку исходных положений механики можно найти в работе [4], не претендующей на формальную строгость, но отражающую существо вопроса.

а) Системы отсчета. Это краеугольное понятие в механике характеризуется К.Труделлом [5, с. 33] как “чистый холст, на котором можно рисовать картины Природы. Этот холст должен быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать”. Аналогичный взгляд отстаивал А.Пуанкаре [6]. Прямое несогласие с этой позицией высказывает А.Эйнштейн [7]. Например, в работе [3, с. 280] он пишет: “теория вводит два рода физических предметов, а именно: 1) масштабы и часы (т.е. системы отсчета. П.Ж.), 2) все остальное, например, электромагнитное поле, материальную точку и т.д. Это в известном смысле нелогично; собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решений основных уравнений, а не считать ее независимой от них”. Иными словами, согласно А.Эйнштейну, нужно сначала нарисовать картину, а только потом подбирать для нее холст. Именно так и поступают в общей теории относительности, причем смысл координат, включающих и время, остается принципиально неопределенным.

Как видим, взгляды механики и новейшей физики по этому пункту диаметрально противоположны и несовместимы.

б) Принцип инерции Галилея (GPI). В механике GPI принимается безоговорочно и отказ от него разрушает все здание механики. Принятие GPI позволяет ввести в рассмотрение инерциальные системы отсчета. Жаль, что этот факт был окончательно осознан и введен в формальные структуры только к 1940 г. Однако на интуитивном уровне он принимался в механике с 1638 г. Так что логические основы механики были укреплены, но сущностное тело механики менять не пришлось. С концепциями новейшей физики GPI принципиально не совместим, ибо он впрямую противоречит специальной теории относительности — см. [8,9]. Отсюда ясно, что отвергается в физике и понятие инерциальной системы отсчета [10, с. 490]. Вместе с тем, А.Эйнштейн и за ним остальные физики используют понятие неускоренной системы отсчета, не определяя этого понятия, т.е. ИСО все-таки вводятся. Не следует думать, что это просто упущение. Такова действительно необходимая для новейшей физики постановка вопроса, ибо GPI впрямую противоречит принципу относительности, основанному на преобразовании Лоренца, а обойтись без привлечения неускоренных систем отсчета не удается.

с) Равномерность хода времени. И.Ньютон был первым, кто попытался дать определение понятия времени, причем он просто постулировал равномерность хода времени. Как определить понятие равномерности Ньютон не указал, но предположил, что в Природе имеются процессы, позволяющие это сделать. Ниже в п.3 мы еще вернемся к этому вопросу. Детальному обсуждению понятие времени было подвергнуто А.Пуанкаре в 1898 г. — см. [11,6]. Основной вывод А.Пуанкаре гласит [6, с. 63]: “Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно применять его только условно”. Этот вывод обоснован А.Пуанкаре весьма обстоятельно, но, к сожалению, А.Пуанкаре в принципе неправильно понимал GPI и возводил его в ранг физического закона, причем необоснованного (еще одно условное соглашение). На самом деле это не так, что и было показано С.Зарембой [8,4,9], но это важное событие произошло только в 1940 г. Если принять GPI, то время в механике вводится с точностью до линейного преобра-

зования $t \rightarrow kt + t_0$. Важно подчеркнуть, что формальное обоснование равномерности хода времени в механике с практической точки зрения ровным счетом ничего не изменило в ней, т.к. при этом не изменилось ни одного закона и ни одного уравнения. А вот новейшей физике упомянутое обоснование наносит невосполнимый логический урон. В новейшей физике требование равномерности хода времени игнорируется и подменяется рассуждениями о синхронизации часов в разных точках системы отсчета. Однако эти рассуждения не имеют отношения к требованию равномерности хода времени. Как бы ни синхронизировали часы, но, прежде всего, они должны идти равномерно. В противном случае такие понятия, как скорость и ускорение вообще теряют объективный смысл [4]. Таким образом, и в этом пункте механика и новейшая физика не могут быть приведены в соответствие друг с другом.

д) Принцип относительности. В механике этот принцип выполняется автоматически. Если в какой-либо теории он не выполняется, то такая теория заведомо содержит ошибки. Никакой существенно новой информации из применения принципа относительности в механике извлечь не удастся. Это и не удивительно, ибо взгляд на системы отсчета как на холст, на котором рисуются картины Природы, немедленно приводит к требованию, чтобы выбор холста не влиял на содержание картины. В частности, для этого необходимо, чтобы в механике использовались исключительно инвариантные дифференциальные операторы, т.е. операторы, не зависящие от выбора системы координат. Основными среди них являются операторы

$$\nabla, \quad \frac{d}{dt}; \quad \nabla \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla.$$

Позиция новейшей физики иная. Соответственно, в ней используются другие операторы

$$\nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t}; \quad \nabla \frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial t} \nabla,$$

где оператор частного дифференцирования по времени не объективен, т.е. зависит от выбора системы координат. Несмотря на то, что операторы ∇ и $\frac{\partial}{\partial t}$ не коммутируют, в физике на это не обращается внимания. Именно в силу использования необъективных операторов принцип относительности играет в физике исключительно важную роль, вплоть до того, что позволяет открывать новые законы.

е) Формальная логика. В механике формальная логика не доводится до уровня математической строгости, но явные нарушения формальной логики считаются недопустимыми. В новейшей физике формальная логика объявлена предрассудком, а ее законы часто подменяются рассуждениями о красоте получаемых уравнений. П. Дирак пишет [12, с. 52]: "...мне бы хотелось подчеркнуть новую точку зрения, принадлежащую А.Эйнштейну. Он считал необходимым качеством фундаментальных уравнений присущую им красоту. Эйнштейн впервые высказал эту мысль и больше чем кто бы то ни было, подчеркивал важность красоты основных уравнений. Вы, конечно, можете спросить: почему уравнения должны обладать необыкновенной красотой? Я не могу ответить на это определенно. Можно лишь сказать, что этот принцип оказался чрезвычайно успешным". В качестве примера нарушения логики сопоставим три утверждения одновременно принимаемые в физике: а) энергия E и импульс p сохраняются; б) масса m не сохраняется; в) справедливо равенство $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$,

где c — скорость света в пустоте, т.е. универсальная постоянная. Другой пример: перенормировка. П. Дирак пишет [12, с. 152]: “Таким образом, большинство физиков совершенно удовлетворены сложившейся ситуацией. Они считают, что квантовая электродинамика стала вполне совершенной теорией и о ней нечего больше беспокоиться. Должен сказать, что мне это в высшей степени не нравится, потому что в такой “совершенной” теории приходится пренебрегать в уравнениях бесконечностями, причем пренебрегать совершенно безосновательно. Это просто бессмысленно математически. В математике величину отбрасывают только в том случае, если она оказывается слишком малой, а не из-за того, что она бесконечно велика и от нее хотят избавиться!”. Для механиков отмечу, что перенормировка относится к числу важнейших принципов физики, а приведенные выше слова произнесены 15 сентября 1975 г., т.е. относительно недавно и отнюдь не в первые годы существования квантовой физики. Отношение к формальной логике разделяет механику и новейшую физику трудно преодолимым барьером. Задачей механики является такое ее развитие, при котором известные в физике результаты получались бы без столь радикальных средств, как отказ от формальной логики.

г) Спинорные движения. В настоящее время уже многим понятно, что спинорные движения являются центральным звеном в устройстве мира. Это известно, по крайней мере, со времен Пифагора. Однако в рациональные науки спинорные движения были введены только Л.Эйлером, да и то не в полной мере. В механику спинорные движения начали интенсивно внедряться во второй половине XX века (см. [4]), причем указанное внедрение оказалось чрезвычайно естественным и органичным. Если внимательно изучать старые теории эфира, прекрасно описанные в книге Г.Лоренца [13], то бросается в глаза, что во всех этих теориях содержится попытка ввести спинорные движения. К сожалению, делается это неправильно. В то время единственным способом восприятия спинорного движения являлось представление о нем, как о роторе вектора скорости. На самом деле это не так. К обсуждению спинорных движений мы еще вернемся, а сейчас обратимся к новейшей физике. Строго говоря, спинорные движения (динамические спины по терминологии, принятой в [4]) в новейшей физике запрещены, но все-таки используются. Об истории этого вопроса можно прочитать в работе [14]. П. Дирак приводит слова Г.Лоренца, адресованные авторам идеи наличия динамического спина у электрона голландским физикам Д.Уленбеку и С.Годсмиту [12, с. 96]: “Нет, у электрона не может быть спина. Я и сам об этом думал, но если бы электрон вращался, то скорость на его поверхности превышала бы скорость света. Так что из этого ничего не выйдет”. Для механиков замечу, что хотя в современной физике используются термины “спин” и “магнитный момент” применительно к элементарным частицам, но они не имеют отношения к соответствующим понятиям механики: это просто красивые названия для номеров соответствующих гармоник у решений уравнений Шредингера или их обобщений. Если говорить о личном мнении, то я точно, хотя и на интуитивном уровне, знаю о колоссальной, ни с чем не сравнимой, роли спинорных движений в микромире. Атомная и ядерная энергии — это энергии спинорных движений. Специальная теория относительности запрещает спинорные движения, на что указал П.Эренфест сразу же после появления работы А.Эйнштейна 1905 г. Но в таком случае СТО запрещает почти все, что на самом деле имеет место в Природе.

г) Экспериментальная проверка результатов теории. Все получаемые в механике результаты должны соответствовать данным эксперимента. Конечно, это трудно и есть немало экспериментов, результаты которых механика не может корректно описать в настоящее время. Например, ни одна теория пластичности не может правильно описать опыты Треска по экструзии свинца. Существует множество других проблем, не поддающихся в настоящее время теоретическому анализу. Но это не повод для того, чтобы кричать “караул” и выворачивать теорию наизнанку. В конце концов, для того и существует экспериментальная механика, чтобы решать проблемы, недоступные в настоящее время для теории. Так было, так есть и так всегда будет. Типичным для механики является эволюционный путь развития. В результате теория отстает от эксперимента на десятилетия и даже на столетия. Мне кажется, что это вполне нормально. Совершенно иначе проблему взаимоотношений между экспериментом и теорией решает новейшая физика. Ее формулы устроены таким образом, что позволяют почти автоматически объяснить все экспериментальные данные. Покажем, как это делается на примере. Допустим, мы хотим измерить скорость v_x частицы А. Введем штрихованную систему координат (излюбленный прием физиков), движущуюся со скоростью $u = c - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и пренебрежимо мала в сравнении со скоростью $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Измерим теперь скорость $v_{x'}$ частицы А в штрихованной системе. Допустим, что мы получили скорость $v_{x'} = -c + \eta$, где $\eta > 0$ малая величина, например $\eta = 2$ см/сек. Вычислим скорость v_x . Имеем по известной формуле [15, с. 30]

$$v_x = \frac{u + v_{x'}}{1 + uv_{x'}/c^2} = c \frac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon + \varepsilon\eta/c} \simeq c \frac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon}.$$

Пусть теперь $\varepsilon = 1$ см/сек, т.е. $\varepsilon \ll c$. Тогда $v_x = c/3 = 10^{10}$ см/сек. Пусть далее $\varepsilon = 3$ см/сек, т.е. и здесь $\varepsilon \ll c$. Имеем $v_x = -0.6 \cdot 10^{10}$ см/сек. Таким образом, играя пренебрежимо малой величиной ε , мы можем менять v_x в гигантских пределах $-0.6 \cdot 10^{10}$ см/сек $\leq v_x \leq 10^{10}$ см/сек. Трудно ли в таких условиях объяснить любое экспериментально полученное значение v_x ?

Приведенных примеров вполне достаточно, чтобы сделать вывод о том, что механика уже не является частью физики, как это было сто лет назад.

Следует подчеркнуть, что все сказанное ни в коем случае нельзя воспринимать как критику в адрес новейшей физики, ибо критика подразумевает анализ состояния дел в физике, чего выше нет и в помине. Да и о какой критике может идти речь? Как бы ни относиться к методам, используемым в современной физике, но невозможно отрицать тот очевидный факт, что физики еще десятки лет назад нашли правдоподобные ответы на такие вопросы, к решению которых механика только готовится приступить. Сумеет ли механика решить эти проблемы традиционными для нее методами? Это требует доказательств. Предстоит огромная работа. Цель данной работы в том и состоит, чтобы привлечь внимание механиков к решению фундаментальных проблем естествознания. Прежде всего, это относится к описанию явлений электромагнетизма и строения атома. Мне кажется, что механика способна внести свой вклад в эти важнейшие вопросы, которые, несмотря на все достижения физики, еще далеки от окончательных решений.

2 Реальность и Наука: два метода познания

Целью всякой науки является познание Реальности. При этом наука исследует не Реальность саму по себе, а некие упрощенные модели Реальности. Приближение к истинной Реальности осуществляется путем расширения модели. Однако, чтобы построить модель, нам, как минимум, необходимо знать, что мы собственно собираемся моделировать. Иными словами, мы должны иметь априорное представление о Реальности. Получается заколдованный круг: чтобы познать Реальность необходима Наука, а чтобы создать Науку необходимо знание Реальности. К счастью, решение этой, казалось бы неразрешимой, проблемы заложено в самой природе человеческого ума, который имеет две качественно различные категории: а) интуицию и б) интеллект. Поскольку оба эти термина сильно перегружены, то необходимо указать смысл, который приписывается им в данной работе.

Интуиция — это способность человека к прямому восприятию окружающего нас мира, которая отнюдь не сводится к пяти основным органам чувств. Это хорошо знают поэты, музыканты, художники и другие представители искусства. Интуиция, как и любая другая способность человека, хорошо поддается тренировке, однако требует постоянных целенаправленных усилий.

Интеллект — это способность человека к логическим суждениям, основанным на априорных знаниях, заложенных в “память” интеллекта. Практически точным аналогом интеллекта является мощный современный компьютер.

Основные недостатки интеллекта в следующем. Во-первых, никакие принципиально новые открытия не могут совершаться на основе чистого интеллекта, как это подробно объяснял А. Пуанкаре. Во-вторых, интеллект может легко приводить к серьезным ошибкам. В самом деле, любой программист знает, что даже самый незначительный сбой в программе или малейшая неточность во входной информации может привести к сколь угодно большой ошибке на выходе. Именно поэтому, даже в наши дни повального увлечения интеллектуальным методом практически ни одно жизненно важное решение не принимается на основе чисто интеллектуального подхода. В механике и физике интеллектуальный метод с большим успехом используется последние 300 лет. Причины этого успеха в том, что интеллект был добавлен к высоко развитой интуиции, которая была присуща всем выдающимся ученым вплоть до последней четверти прошлого столетия. Успех, достигнутый от соединения интуиции с интеллектом, был ошибочно приписан интеллекту. В результате произошла большая переоценка возможностей интеллектуального метода. Это нашло свое отражение в постановке Д. Гильбертом знаменитой шестой проблемы об аксиоматизации физических наук. По существу вся теоретическая физика XX века строится именно интеллектуальным методом. Недостаточность интеллектуального подхода хорошо сознавал один из самых выдающихся интеллектуалов Анри Пуанкаре, что он показал в ряде своих работ [6]. Мне кажется, что главный смысл его работ до сих пор не осознан в должной мере, хотя он более, чем прозрачен: с точки зрения чистого интеллекта наука есть ничто иное, как набор условных соглашений и не более того. Кто только не критиковал А. Пуанкаре за его конвенционализм. Однако критики не поколебали систему аргументации А. Пуанкаре и вообще ломались в открытую дверь. Ибо никто не видел трагизма ситуации лучше самого Пуанкаре, и он мучительно искал выход из создавшегося тупика, но не нашел его. По иронии судьбы А. Пуанкаре следует назвать

основным творцом метода новейшей физики. Именно Пуанкаре “развязал руки” новому поколению физиков, продемонстрировав условность науки. Ирония в том, что сам Пуанкаре, настаивая на интеллектуальной условности науки, все-таки твердо стоял на том, что за интеллектуальной условностью стоит нечто, не позволяющее свободе научного поиска превращаться в научный произвол. Новейшая физика посчитала подобную позицию А.Пуанкаре предрассудком и сохранила только его доказательства условности научных соглашений. Причина неудачи А.Пуанкаре вполне очевидна. Как и большинство современных ученых, А.Пуанкаре явно недооценил принципиальную неустранимость интуиции из основ любой рациональной науки, включая математику. Это тем более удивительно, что А.Пуанкаре обладал глубочайшим интуитивным умом, и он даже мягко критиковал Д.Гильберта за его стремление изгнать интуицию из математики. Для ученых-механиков ценность и необходимость интуитивного представления об объекте и процессах, в которых участвует этот объект, никогда не вызвала сомнений. На этапе выбора модели, т.е. написания основных уравнений, логика принимает лишь косвенное участие. Только после написания уравнений логика вступает в свои неограниченные права.

В принципе возможно использовать интуитивный и интеллектуальный методы познания независимо друг от друга. Интуитивное познание имеет тот недостаток, что ему невозможно обучить кого бы то ни было. Однако именно интуитивный метод лежит в основе составления научных моделей. Чисто интеллектуальный подход может создавать видимость научных открытий, но по существу он бесплоден. Особую популярность в последние десятилетия приобрела философия “черного ящика”, которая относится к достижениям интеллектуального метода. Казалось, что этот путь может привести к успеху. Однако на проверку оказалось, что “черный ящик” хорош только тогда, когда он прозрачен, т.е. его содержимое заранее известно. Достоинством интеллектуального метода является то, что его достижениям легко обучать учеников.

Интеллектуальный метод охарактеризуем словами А.Эйнштейна: “Наука является созданием человеческого разума с его свободно изобретенными идеями и понятиями”.

Интуитивный метод познания лучше всего характеризуется словами Сократа: при интуитивном познании “душа взбирается на высочайшую наблюдательную башню бытия”.

Главный тезис этой работы: никакое истинное развитие науки невозможно без непосредственного участия интуиции, а свободно изобретенных идей и понятий не существует в природе.

3 Метафизические представления о строении физического мира

Как уже подчеркивалось, интуитивное представление о какой-то части Реальности должно предшествовать созданию той или иной математической модели этой части Реальности. Для механиков данное утверждение кажется самоочевидным. Для физиков, занимающихся разработками теорий для объектов, не поддающихся непосредственному восприятию человеком, высказанный тезис является, мягко говоря, спорным. Мы должны быть благодарны физикам за то, что они испытали другой подход, в котором математическая модель предшествует интуитивному образу, причем по-

следний вообще не обязателен. Сейчас уже можно подвести некоторые итоги этого небывало интенсивного интеллектуального опыта. На начальном этапе успехи сыпались как из рога изобилия, но они относились к простейшим ситуациям. При переходе к более сложным системам, т.е. к ситуациям, где интуиция отказывала уже по настоящему, трудности стремительно нарастали. Как бы то ни было, но интеллектуальный опыт физиков не дает убедительного опровержения высказанному в начале этого пункта тезису. Во всяком случае, именно отсутствие интуитивного представления об электромагнитном поле, заряде и электричестве не позволило механике включить эти объекты в свои структуры, а вовсе не мифические пороки, приписываемые механике физиками.

Цель данного пункта состоит в описании схематического строения физического мира в том виде, как я его понял при изучении разного рода метафизических учений, а также из внимательного прочтения трудов М.Фарадея [16] и Дж.Максвелла [17]. Я, конечно, не могу гарантировать, что правильно понял все изученное мною. На данном этапе это, видимо, невозможно, поскольку во многих деталях в литературе содержится весьма заметные расхождения, что характерно для наблюдений на интуитивном уровне. По принятой терминологии то, что изложено ниже, называется гипотезой. Научной ценностью эта гипотеза будет обладать только тогда, когда мы облечем ее в форму математических уравнений, научимся их применять, а результаты не будут противоречить известным экспериментальным данным. При этом дух и традиции механики требуют придерживаться позиции Г.Герца [18, с.23]: “При зрелом познании в первую очередь должна учитываться логическая чистота; только логически чистые картины должны проверяться в отношении их правильности, только правильные картины — в отношении их целесообразности”. Следует добавить, что “логически чистой картине” предшествует интуитивный образ того, что мы собираемся логически чисто описать. Этот интуитивный образ в свою очередь не должен быть слишком сложным для возможной рациональной науки на рассматриваемом этапе ее развития. Например, интуитивные представления о Мире у Пифагора и Платона были несравнимо сложнее (и правильнее), чем у Галилео Галилея. Центр Вселенной по Пифагору размещался далеко за пределами солнечной системы, а в основе физического мира лежало то, что ниже описывается под названием четвертого эфира. Архимед пользовался уже упрощенной схемой — гелиоцентрической системой [19]. Геоцентрическая система Птолемея была насильственно внедрена (как единственно возможная) церковь в IV веке после Рождества Христова. Возможности рациональной науки отражать интуитивные (сильно упрощенные) представления стали достаточными только с эпохи Возрождения. В настоящее время возможности рациональной науки сильно возросли. Соответственно появилась возможность попытаться описать методами рациональной науки уже значительно более сложные интуитивные представления о Реальности. Именно такие интуитивные представления я и хочу изложить в этом пункте.

В традициях метафизических учений всякую сущность принято делить на семь градаций. Седьмой градацией Космоса является Физический Мир (Мир плотный, седьмой космический эфир, космическое твердое тело). Физический Мир, в свою очередь, делится на семь градаций, называемых эфирами. Каждый из этих эфиров имеет дискретное строение, т.е. атомную структуру. Плотности этих эфиров сильно различаются, и они как бы вложены один в другой. Эфиры взаимодействуют между собой сложным образом и подчиняются так называемому “закону действия тройной

силы в четырех мирах”. Другое название этого закона — “принцип додекаэдра Пифагора”. Точного смысла этого закона я не знаю и упоминаю его для того, чтобы читатель мог осознать трудности, возникающие при попытках изучить метафизические учения. Описывать я буду только то, что, как мне кажется, поддается анализу методами современной рациональной науки. Итак, Физический Мир расщепляется на семь эфиров.

Первый эфир. Состоит из быстровращающихся частиц одного сорта образующих как бы кристаллическую решетку. По этой причине его часто именуют “подвижная неподвижность”. Частицы первого эфира неделимы на уровне Физического Мира, а их массы настолько малы, что даже фотоны в сравнении с ними обладают невообразимо огромными массами. Первый эфир практически не ощутим на уровне макромира, но на микрочастицы вплоть до электронов оказывает влияние.

Комментарий. Первый эфир не рассматривается и не упоминается в современной физике. Однако он вовсе не является совершенно незнакомым современной науке. Прежде всего, первый эфир является едва ли не единственным претендентом на то, что субъективно ощущается человеком как время. Вдумаемся в следующее заявление И.Ньютона [20, с. 45]: “Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время”... под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту отличную от времени величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время”. Существует ли эта “отличная от времени величина”? А если существует, то какую бы природу она могла иметь? Легко понять, что время не может быть связано с какими-либо характеристиками трансляционного движения. Однако, если вообразить, что в каждой точке пространства имеется некое тело, совершающее перманентное вращение, то субъективное ощущение времени становится физической реальностью. Угол, накручиваемый упомянутым телом, как раз и может служить той величиной, о которой говорит Ньютон. Более определенно пишет об этом наш современник Н.А.Козырев в своих работах, посвященных причинной механике [21]. Работы Н.А.Козырева чрезвычайно уязвимы для формальной критики, но стоит заменить в них термин “время” на термин “первый эфир”, как многое в его рассуждениях становится ясным, по крайней мере, на интуитивном уровне. В следующем разделе будет показано, что типичными уравнениями, описывающими первый эфир, являются уравнения типа Шредингера и Клейна-Гордона.

Второй эфир — электромагнитное состояние материи. Атомы второго эфира являются уже сложными образованиями, но и эти атомы чрезвычайно малы — их массы много меньше массы фотона. Возмущения в этом эфире распространяются со скоростью света и более высокими.

Комментарий. Второй эфир — это то, что в современной физике называется электромагнитным полем. Но стоит подчеркнуть, что в отличие от воззрений физиков, электромагнитное поле не имеет никакого отношения к зарядам, хотя заряженные микротела (например, электроны) вносят сильные возмущения в электромагнитное поле. Как будет отмечено ниже типичными уравнениями, описывающими динамику второго эфира, являются уравнения максвелловского типа, но более сложные.

Третий эфир или световое состояние материи. Это, собственно говоря, взвесь мельчайших частиц в электромагнитном поле. Массы этих частиц, называемых фотонами, уже известны, вероятно, достоверно. Они имеют порядок 10^{-65} г. Весьма

похоже на то, что свет — это движение упомянутых мельчайших частиц в электромагнитном поле на скорости распространения сигналов во втором эфире. Какие при этом происходят явления легко представить себе, если рассмотреть движение самолета в атмосфере со скоростью в точности равной скорости звука. Если третий эфир действительно реален, то корпускулярно-волновая природа света становится самоочевидной.

Четвертый эфир или тепловое состояние материи. Этот эфир уже достаточно хорошо известен под названием плазмы. Отличие его от плазмы заключено в том, что в плазме недостаточно учитываются спинорные движения (вращательные степени свободы). Именно в этом эфире зарождается то свойство тел, которое проявляется как заряд в последующих эфирах. Однако, например, фрикционное электричество, не имеющее прямого отношения к привычному нам электричеству, объясняется именно на уровне четвертого эфира. Четвертый эфир играет исключительно важную роль во многих метафизических учениях.

Пятый, шестой и седьмой эфиры не нуждаются в комментариях, ибо это газообразное, жидкое и твердое состояние тел соответственно. Отмечу только, что электричество является атрибутом этих эфиров.

В заключение этого пункта еще раз подчеркну, что все вышесказанное является не более, чем предположением для рациональной науки. Я рассматриваю сказанное как нулевое приближение к Реальности. Тщательный анализ математических моделей описанных эфиров покажет, насколько они приемлемы, а в чем потребуют значительных уточнений. Этот анализ, конечно, проявит дополнительные возможности интуиции и тогда возникнет новое приближение к Реальности. Как бы плохи ни были сформулированные выше представления, они все-таки, за неимением лучших, необходимы для рациональной механики.

4 Динамика первого эфира. Уравнение Шредингера

Г.Лоренц в заключение книги [13, с.66] пишет: “В последнее время механические объяснения происходящих в эфире процессов все более отступают на задний план. Для многих физиков основной частью теории является точное количественное описание явлений, как, например, данное в уравнениях Максвелла. Однако, даже если стоять на такой точке зрения, механические аналогии все же сохраняют некоторое значение. Они помогают нам думать о явлениях и могут явиться источником идей для новых исследований”. Эти слова произнесены великим физиком в 1902 году и, очевидно, для физики это было прощание перед окончательным разрывом с классической механикой. Описание Г.Лоренцом старых теорий эфиров ясно показывает, что они были обречены на неудачу, т.к. с одной стороны, все эти теории демонстрируют явное желание их авторов ввести в рассмотрение спинорные движения, но, с другой стороны, подходящий для этого математический аппарат в то время не был разработан. Книга Е. и Ф.Коссера [22], в которой впервые рассмотрены мультиполярные среды, опубликована в 1909 г. Впрочем, и эта книга еще не давала всех необходимых средств. Настоящее развитие мультиполярных теорий в механике началось после 1958 г.

Для ясного понимания нижеследующего необходимо знание мультиполярных теорий и статьи [4]. Обратимся к выводу уравнений динамики первого эфира.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета S . Выделим в ней кусочно-гладкую замкнутую поверхность Σ , не имеющую точек самопересечения и фиксированную в S -системе. Через $m(\Sigma)$ обозначим число частиц, находящихся в данный момент времени t внутри Σ . Как и всегда в феноменологических теориях, число $m(\Sigma)$ не обязательно является целым, что не имеет значения, т.к. по предположению $m(\Sigma)$ велико. Тогда для $m(\Sigma)$ получаем

$$m(\Sigma) = \int_{v_\Sigma} \rho(\mathbf{x}, t) dv, \quad (1)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — объемная плотность частиц, \mathbf{x} — вектор положения точки тела отсчета, v_Σ — объем заключенный внутри Σ . Включение времени t в $\rho(\mathbf{x}, t)$ показывает, что число частиц внутри Σ переменное. Ранее говорилось, что частицы первого эфира неподвижны в абсолютном пространстве. Поскольку мы пользуемся движущейся S -системой, то число частиц в Σ переменное. Множество частиц внутри Σ назовем телом A . Кинетическую энергию тела A представим в виде

$$K(A) = \int_{v_\Sigma} \rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{K} dv, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \xi \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где \mathcal{K} — плотность кинетической энергии; $\rho \xi dv$ — масса объема эфира dv ; $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ — тензор поворота частицы; $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ — угловая скорость; $\boldsymbol{\Theta}$ — тензор инерции; ξ и $\boldsymbol{\Theta}$ не зависят ни от \mathbf{x} , ни от t , т.к. все частицы однотипны. Количество движения \mathbf{A} и динамический спин \mathbf{B} вычисляются по формулам [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{v_\Sigma} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{A} dv, & \mathbf{A} &= \xi \mathbf{V} = \text{const}; \\ \mathbf{B} &= \int_{v_\Sigma} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) dv, & \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x} \times \xi \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{B} — плотность динамического спина. Напомним, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ вычисляется по уравнению Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t), \quad \dot{f} \equiv \frac{df}{dt}. \quad (4)$$

Запишем первый закон динамики Эйлера [4]

$$\frac{d}{dt} \int_{v_\Sigma} \rho \xi \mathbf{V} dv = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} d\Sigma + \int_{v_\Sigma} \dot{\rho} \xi \mathbf{V} dv, \quad (5)$$

где считается, что внешние массовые силы отсутствуют: второе слагаемое в правой части есть скорость подвода количества движения в тело A ; $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} d\Sigma$ — сила, действующая на площадку $d\Sigma$ с единичной внешней нормалью \mathbf{n} . Используя стандартные рассуждения, из (5) получаем

$$\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} = -\boldsymbol{\tau}_{(-\mathbf{n})}, \quad \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений в эфире. Видим, что $\boldsymbol{\tau}$ находится из условий статики, что несколько необычно для динамической теории — в этом специфика первого эфира.

Второй закон динамики Эйлера имеет вид [4]:

$$\frac{d}{dt} \int_{v_\Sigma} \rho \mathbf{B} dv = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}_{(n)} + \boldsymbol{\mu}_{(n)}) d\Sigma + \int_{v_\Sigma} \rho \mathbf{L} dv + \int_{v_\Sigma} \dot{\rho} \mathbf{B} dv, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{(n)} d\Sigma$ — момент, действующий на площадку $d\Sigma$; $\rho \mathbf{L}$ — объемная плотность внешнего момента; последнее слагаемое есть скорость подвода кинетического момента в тело A .

Используя (7) и учитывая (6), получаем

$$\boldsymbol{\mu}_{(n)} = -\boldsymbol{\mu}_{(-n)}; \quad \boldsymbol{\mu}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu},$$

где тензор 2-го ранга $\boldsymbol{\mu}$ называется тензором моментных напряжений.

Локальная форма второго закона динамики имеет вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_x + \rho \mathbf{L} = \rho \dot{\mathbf{B}}; \quad \nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_x \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (8)$$

Система уравнений (6), (8) содержит 21 неизвестную функцию (по девять координат $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$ и три параметра, определяющие тензор \mathbf{P}), т.е. она не замкнута. Отдельного обсуждения требует функция $\rho(\mathbf{x}, t)$ но о ней речь пойдет ниже. Для замыкания системы (6), (8) необходимо привлечь определяющие уравнения. Трудность здесь в том, что мы не знаем от каких аргументов зависят $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$. Чтобы преодолеть это затруднение, выпишем уравнение баланса энергии [4] для тела A .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_\Sigma} \rho (\mathcal{K} + \mathcal{U}) dv &= \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma + \\ &+ \int_{v_\Sigma} [\rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\rho} (\mathcal{K} + \mathcal{U})] dv, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\rho \mathcal{U}$ — объемная плотность внутренней энергии, а последнее слагаемое в правой части (9) есть скорость подвода энергии в тело A , возникающее из-за движения S -системы.

В локальной форме уравнение (9) принимает вид

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

где учтены уравнения (6), (8); условие $\mathbf{V} = \text{const}$ и разложение

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^s + \mathbf{q} \times \mathbf{E} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_x = -2\mathbf{q} \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^s + \nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\tau}^s$ — симметричная часть $\boldsymbol{\tau}$.

Уравнение (10) необходимо преобразовать к другому виду. Для этого необходимо учесть следующие тождества

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T)_x \Rightarrow 2\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{q} \times \mathbf{P}^T) \cdot \cdot \dot{\mathbf{P}}. \quad (12)$$

Далее, введем в рассмотрение векторы деформации Φ_k с помощью уравнений Пуассона

$$\partial_k \mathbf{P} = \Phi_k \times \mathbf{P} \Rightarrow \Phi_k = -\frac{1}{2} \left[\partial_k \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top \right]_\times, \quad \partial_k \equiv \partial / \partial x_k. \quad (13)$$

Дифференцируя (4) по x_k и учитывая (13), получаем

$$(\partial_k \mathbf{P})' = \partial_k \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} + \boldsymbol{\omega} \times (\Phi_k \times \mathbf{P}).$$

Дифференцируя (13) по времени и учитывая (4), получаем

$$(\partial_k \mathbf{P})' = \dot{\Phi}_k \times \mathbf{P} + \Phi_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}).$$

Левые части последних двух равенств очевидно совпадают, следовательно, совпадают и их правые части. Отсюда получаем уравнения структуры Э.Картана [23]:

$$\partial_k \boldsymbol{\omega} = \dot{\Phi}_k + \Phi_k \times \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \nabla \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{i}_k \otimes \Phi_k, \quad (14)$$

где \mathbf{F} называется тензором деформации.

Подставляя (12) и (14) в (10) и проводя некоторые преобразования, уравнению баланса энергии придаем вид

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\mu}^\top \cdot \dot{\mathbf{F}} + \left[\left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}^\top \cdot \mathbf{F})_\times + \mathbf{q} \right) \times \mathbf{P} \right]^\top \cdot \dot{\mathbf{P}}. \quad (15)$$

Теперь уже легко принять следующие определяющие уравнения

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{F}, \mathbf{P}), \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{F}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{F}, \mathbf{P}). \quad (16)$$

Учитывая равенство

$$\dot{U} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}} \right)^\top \cdot \dot{\mathbf{F}} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \dot{\mathbf{P}},$$

уравнение (15) переписываем в виде

$$\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}} - \boldsymbol{\mu} \right)^\top \cdot \dot{\mathbf{F}} + \left[\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} - \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}^\top \cdot \mathbf{F})_\times + \mathbf{q} \right) \times \mathbf{P} \right]^\top \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (17)$$

Получили линейную функцию скоростей $\dot{\mathbf{F}}$ и $\dot{\mathbf{P}}$, которая должна тождественно обращаться в нуль. Однако в (17) не все скорости линейно независимы. В самом деле, из уравнения Пуассона имеем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^\top \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top.$$

С учетом этого равенства можно утверждать, что для справедливости (17) при всех возможных процессах необходимо выполнение соотношений

$$\boldsymbol{\mu} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}, \quad \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}^\top \cdot \mathbf{F})_\times + \mathbf{q} \right) \times \mathbf{P} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (18)$$

Второе из этих равенств после умножения на \mathbf{P}^T справа и вычисления векторного инварианта ($\mathbf{A} \times = \mathbf{0}$) дает

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{2} \rho \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \cdot \mathbf{F} \right] \times. \quad (19)$$

Соотношениями (16), (18), (19) определяются тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ и кососимметричная часть тензора напряжения $\boldsymbol{\tau}$. Симметричная часть $\boldsymbol{\tau}$ должна найдется по (11) и дополнительным определяющим уравнениям. Однако в дальнейшем $\boldsymbol{\tau}^s$ нас интересовать не будет. Обращает на себя внимание тот факт, что $\boldsymbol{\tau}^s$ не влияет на внутреннюю энергию. Удивляться этому не приходится. Здесь можно вспомнить, что внутренняя энергия абсолютно твердого тела не зависит от напряжений в теле. К предыдущим уравнениям осталось добавить закон “сохранения” частиц в объеме v_Σ . Нетрудно получить уравнение

$$\dot{\rho} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \rho,$$

которое показывает, что изменение плотности частиц происходит только за счет движения эфира относительно S-системы. Если эфир однороден, то $\nabla \rho = \mathbf{0}$ и $\dot{\rho} = 0$.

Выше была представлена, по существу, общая теория чисто моментной среды, в которой частицы только вращаются, их трансляционные движения обусловлены только движением системы отсчета. Насколько мне известно, уравнения такого типа получены впервые. Следует отметить, что теории эфира, представленные в книге Г.Лоренца, не имеют отношения к первому эфиру. Выведенные выше уравнения являются более общими, чем это необходимо для первого эфира. Они просто показывают в каком классе уравнений следует искать динамические уравнения первого эфира. Далее я приведу весьма сильные ограничения, которые, разумеется, не обязательны с чисто теоретической точки зрения и оправдываются на этапе их построения исключительно интуитивными представлениями. Важно только чтобы эти ограничения не вступали в противоречия ни с формальной логикой, ни со всеми предыдущими рассуждениями.

Прежде всего, примем, что частицы первого эфира обладают трансверсально изотропными тензорами инерции

$$\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (20)$$

где λ и μ — осевой и экваториальный моменты инерции, единичный вектор \mathbf{e} задает ось изотропии. Вектор \mathbf{e} фиксирован в S-системе.

Стационарное состояние первого эфира. Оно является для нас основным и определяется заданием тензора поворота вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e}) \equiv (1 - \cos \Omega t) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \Omega t \mathbf{E} + \sin \Omega t \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \quad (21)$$

где $\Omega = \text{const}$ есть угловая скорость вращения частицы. Тензору поворота (21) отвечают угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и тензор деформации \mathbf{F} следующего вида

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Считаем, что тензору $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ и тензору поворота (21) отвечают нулевой тензор $\boldsymbol{\mu}$ и нулевой вектор \mathbf{q} .

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e})) = \mathbf{0}.$$

Эти допущения аналогичны гипотезе натурального состояния в механике сплошных сред. Легко видеть, что при стационарном состоянии эфира основное уравнение динамики эфира (8) выполняется тождественно. Таким образом, стационарное состояние первого эфира, если он вообще существует, дает нам то, что субъективно воспринимается нами, как время: в каждой точке пространства угол $\alpha = \Omega t$, накручиваемый частицей, по существу не отличим от времени. Может вызвать удивление тот факт, что в пространстве (системе отсчета) появилась выделенная ось \mathbf{e} , т.е. появилась определенная анизотропия. Соответствует ли она Реальности? Трудно ответить на этот вопрос, но нельзя и отрицать такую возможность. Например, строение Солнечной системы и Галактик указывает на их стремление расположиться в одной плоскости, а нормаль к этой плоскости, возможно, и дает нам ось \mathbf{e} . Можно указать и другие соображения. В любом случае требуется тщательный анализ. Пока же рассматриваем все сказанное как сугубо теоретическую возможность и не более того.

Обратимся к выводу уравнений, описывающих распространение возмущений в первом эфире. Примем, что эти возмущения малы по норме. Тензор поворота представим в виде композиции поворота (21) и малого поворота

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e}), \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (22)$$

где ψ , θ , φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, т.е. углы Эйлера, описывающие малый поворот. Малым здесь является только угол нутации θ : $|\theta| \ll 1$. Выражение (22) легко переписать в другом виде [24]

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{e}), \quad \beta = \Omega t + \psi + \varphi, \quad \boldsymbol{\gamma} = \theta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad (23)$$

где вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e} = 0$) мал по модулю: $|\boldsymbol{\gamma}| = |\theta|$. Малой считается и сумма $\varphi + \psi$.

Нетрудно вычислить вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и векторы деформации Φ_k , отвечающие тензору поворота (23)

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}) \mathbf{e}, \quad \Phi_k = \partial_k \boldsymbol{\gamma} + \partial_k (\varphi + \psi) \mathbf{e}. \quad (24)$$

Видим, что $\boldsymbol{\omega}$ содержит большое слагаемое $\Omega \mathbf{e}$, а векторы деформации Φ_k малы. Для тензора деформации \mathbf{F} получаем равенство

$$\mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\gamma} + \nabla (\varphi + \psi) \otimes \mathbf{e} = \nabla [\boldsymbol{\gamma} + (\varphi + \psi) \mathbf{e}], \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (25)$$

Кинетический момент \mathbf{B} , заданный выражением (3), отличается от динамического спина $\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}$ только несущественным постоянным слагаемым $\mathbf{x} \times \xi \mathbf{V}$. Поэтому в дальнейшем \mathbf{B} будем называть динамическим спином, а слагаемое $\mathbf{x} \times \xi \mathbf{V}$ будет просто игнорироваться.

Примем основные допущения, характерные не для всякой моментной среды, а только для первого эфира

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \varphi + \psi = 0. \quad (26)$$

Тогда линеаризованное выражение для динамического спина принимает вид

$$\mathbf{B} = \lambda \Omega \mathbf{e} + \boldsymbol{\mu} \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = \lambda \Omega = \text{const}. \quad (27)$$

Выражения (24) принимают вид

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\gamma}, \quad \nabla \boldsymbol{\omega} = (\nabla \boldsymbol{\gamma})' + \nabla \boldsymbol{\gamma} \times \Omega \mathbf{e}. \quad (28)$$

Уравнение баланса энергии (10) переписывается в виде

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\gamma}} + 2\mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \Omega [\boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) + 2\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})].$$

Инвариантность внутренней энергии по отношению к замене системы отсчета приводит к условию, которое в линеаризованном случае дает равенство

$$\boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) + 2\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) = 0. \quad (29)$$

Поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mu}^T \cdot \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma})' + 2\mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}(\nabla \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (30)$$

Соотношения Коши-Грина (18), (19) принимают совсем простой вид

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \nabla \boldsymbol{\gamma}}, \quad 2\mathbf{q} = \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad (\rho = \text{const}). \quad (31)$$

В линейной теории для внутренней энергии можно принять квадратичную форму

$$\rho \mathcal{U} = \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\gamma} + \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (32)$$

где тензоры четвертого ранга \mathbf{A} третьего ранга \mathbf{B} и второго ранга \mathbf{C} трансверсально изотропны с осью изотропии \mathbf{e} и удовлетворяют ограничениям

$$\mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0},$$

причем тензор второго ранга \mathbf{d} здесь произволен. Эти ограничения, очевидно, не уменьшают степени общности (32).

Общий вид трансверсально изотропных тензоров, удовлетворяющих вышеприведенным ограничениям, дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_0 \mathbf{i}_\alpha \mathbf{e} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{e} + A_1 \mathbf{a} \mathbf{a} + A_2 (\mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\alpha \mathbf{a} \mathbf{i}_\alpha) + A_3 \mathbf{c} \mathbf{c}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (33)$$

где подразумевается суммирование по греческим индексам от 1 до 2. Энергия деформации (32) положительно определена, если выполнены неравенства

$$A_0 > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad C > 0.$$

Условие (29) будет выполнено, если $A_3 = A_1 + A_2$.

Простейшая форма энергии для первого эфира имеет вид

$$\rho \mathcal{U} = A \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\gamma}^T + C \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad A > 0, \quad C > 0. \quad (34)$$

В этом случае

$$\boldsymbol{\mu} = A\nabla\boldsymbol{\gamma}, \quad 2\mathbf{q} = C\boldsymbol{\gamma}. \quad (35)$$

Уравнение баланса кинетического момента, т.е. второй закон динамики Эйлера (8), в случае (35) принимает простой вид

$$A\Delta\boldsymbol{\gamma} - C\boldsymbol{\gamma} = \rho\boldsymbol{\mu}\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \rho\lambda\Omega\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{e}. \quad (36)$$

На первый взгляд кажется, что уравнение (36) не встречалось ранее в физике. Однако это не совсем так. Запишем уравнение (36) в скалярной форме

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\mathbf{i}_1 + \gamma_2\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{e} = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2, \quad |\mathbf{i}_\alpha| = 1$$

и введем функцию

$$\Psi = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad i^2 = -1. \quad (37)$$

Тогда уравнение (36) записывается в виде

$$-\rho\mu\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + i\rho\lambda\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -A\Delta\Psi + C\Psi. \quad (38)$$

Если в этом уравнении отбросить первое слагаемое в левой части, то получаем хорошо известное уравнение Шредингера. Если отбросить второе слагаемое, то получаем не менее известное уравнение Клейна-Гордона. Оба уравнения лежат в основаниях квантовой механики. Напомним, что “вывод” этих уравнений в квантовой механике основан на весьма неубедительных для механиков рассуждениях. По сути единственным оправданием этих уравнений являются вытекающие из них результаты.

Более удобной является форма (36). Для разделения переменных в (36) будем искать его решение в виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}\mathbf{t}\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{p}\mathbf{e} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \ddot{\boldsymbol{\gamma}} = -p^2\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Тогда для вектора $\boldsymbol{\Gamma}$ получаем уравнение

$$A\Delta\boldsymbol{\Gamma} - C\boldsymbol{\Gamma} = -(\rho\mu p^2 - \rho\lambda\Omega p)\boldsymbol{\Gamma}. \quad (39)$$

Частные решения этого уравнения ищутся в виде

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{D}\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

где \mathbf{k} называется волновым вектором. Подставляя это выражение в (39), получаем дисперсионное уравнение

$$\rho\mu p^2 - \rho\lambda\Omega p - (C + Ak^2) = 0, \quad k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

Откуда получаем

$$p_{1,2} = \frac{\lambda\Omega}{2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\Omega}{2\mu}\right)^2 + \frac{C + Ak^2}{\rho\mu}}. \quad (40)$$

Итак, в первом эфире имеется две скорости распространения волн сильно различающиеся по величине.

К сожалению, объем статьи не позволяет обсудить множество вопросов, возникающих в связи с уравнением (36) и его приложениями. Замечу только, что угловая скорость Ω существенно входит в (36) и именно она, видимо, в первую очередь может претендовать на роль фундаментальной мировой константы.

Можно предположить, что первый эфир играет главную роль в объяснении строения ядер и атомов. Для макротел первый эфир практически не ощутим, если не принимать во внимание особо тонких экспериментов.

5 Механика и классическая электродинамика

Как уже отмечалось, второй эфир (или, если угодно, второе поле) — это электромагнитное состояние материи, которое в современной физике описывается уравнениями Максвелла. Поэтому можно было бы ожидать, что динамика второго эфира должна подчиняться уравнениям Максвелла. Однако это не так. Уравнения динамики второго эфира значительно сложнее уравнений Максвелла и качественно от них отличаются. К сожалению, полный вывод этих уравнений выходит за рамки данной работы.

Целью данного пункта является описание классических уравнений Максвелла и их интерпретация в терминах механики. Именно с электродинамики берет начало точка зрения, что механистическое описание мира принципиально ограничено и непригодно для изучения электромагнитных процессов. Ниже я намерен опровергнуть эту точку зрения.

В современной физике считается, что уравнения Максвелла являются чем-то вроде божественного откровения и потому просто постулируются. Их каноническая запись имеет следующий вид [25, с. 76]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c} \mathbf{j}, \quad (41)$$

где ρ — плотность заряда, \mathbf{j} — плотность тока, т.е. скорость протекания заряда сквозь единицу площади. Здесь дается современная версия, отличная от точки зрения Дж.Максвелла: по Максвеллу ток не обязательно связан с движением зарядов. Последнее обстоятельство, как будет показано ниже, весьма существенно. Из (41) следует условие разрешимости

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t. \quad (42)$$

Примечание. Физики предпочитают называть уравнение (42) законом сохранения заряда и считать его законом Природы. С точки зрения механики никаких законов сохранения в общем случае не существует, но есть уравнения баланса неких величин. В частности, локальное уравнение баланса заряда имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t + \mathfrak{h}, \quad (42a)$$

где \mathfrak{h} — объемная плотность скорости подвода заряда в рассматриваемую систему. Даже если в Природе в целом существуют некие законы сохранения, то для рациональной науки они абсолютно бесполезны, поскольку мы никогда не рассматриваем и никогда не сможем рассмотреть Природу в целом. Механика и физика исследуют

весьма ограниченные материальные системы, которые могут обмениваться со своим окружением чем угодно, например, зарядом. Только в очень узком классе изолированных систем появляются законы сохранения. Таким образом, уравнение (42) ни в коем случае нельзя трактовать как закон Природы — это именно необходимое условие разрешимости классических уравнений Максвелла. Оно перестанет быть таковым для модифицированных уравнений Максвелла, рассмотренных в следующем пункте, и для них вполне допустимо использовать (42a) вместо (42).

“Что касается вывода уравнений Максвелла, то с течением времени стали смотреть на дело так, что эти уравнения невозможно вывести из уравнений механики даже ценой каких бы то ни было обобщений, и большинство современных теоретиков сейчас твердо стоят на той точке зрения, что эти уравнения и не надо выводить, что их надо рассматривать как очень удачное, почти идеально точное описание электромагнитных процессов”. Эта цитата извлечена из довольно старой и далеко не бесспорной книги [26, с. 155-156]. Тем не менее, она вполне точно отражает и современную позицию. Даже беглого взгляда на систему (41) достаточно, чтобы усомниться в ее непогрешимости. Прежде всего, вызывает сомнение трактовка тока, согласно которой вектор \mathbf{j} есть скорость протекания заряда сквозь единицу площади. Если это так, то система (41) переопределена и в общем случае неразрешима. Это следует просто из того факта, что для шести координат векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} имеем восемь уравнений (ρ и \mathbf{j} — заданы!). Правда, третье уравнение в (41) является следствием трех остальных, если это условие выполнено в какой-либо момент времени. Так что фактически в (41) содержится семь уравнений для шести неизвестных. Этого противоречия можно избежать, если отказаться от вышеприведенной трактовки тока \mathbf{j} . Какие из этого вытекают следствия, будет показано в п. 7. Однако главные претензии к системе (41) заключаются в тех следствиях, которые дает механическая интерпретация системы (41). С этой целью перепишем систему (41) в другом, но эквивалентном, виде.

Введем в рассмотрение вектор \mathbf{u} такой, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (43)$$

Допустимость введения такого вектора следует из 2-го и 3-го уравнений системы (41). Известно, что любой вектор \mathbf{u} можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{\Phi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Phi} = 0, \quad (44)$$

где потенциал φ определен с точностью до произвольной функции координат, т.е. прибавление к φ произвольной функции координат не меняет ни электрического, ни магнитного полей. Из первого уравнения системы (41) и (43) – (44) следует, что

$$\Delta \varphi = \rho, \quad \partial \rho / \partial t = -c\rho / \varepsilon_0, \quad (45)$$

где функция ρ также определена с точностью до произвольной функции координат. Таким образом, осталось выполнить только четвертое уравнение в (41). Для этого ток \mathbf{j} представим в виде

$$\mathbf{j} = \nabla \varphi_* + \nabla \times \mathbf{\Phi}_*, \quad \varphi_* = \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Phi}_* = 0. \quad (46)$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение в (41), получаем

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c} \Phi_* = 0. \quad (47)$$

Нетрудно убедиться, что система (43) – (47) в точности эквивалентна системе (41). Причем эта система допускает простую механическую интерпретацию. Обратим внимание, что согласно (46) ток не обязательно порождается движением зарядов. Впрочем, и в последнем случае можно трактовать ток как движение зарядов, если электромагнитное поле представить себе состоящим из двух сред, одна из которых есть континуум отрицательно заряженных частиц, а вторая — континуум положительно заряженных частиц, причем суммарная плотность заряда равна нулю. В этом случае ток есть движение одной среды относительно другой. При такой трактовке вакуум вообще не существует.

Соберем теперь все уравнения в единую таблицу, состоящую из двух колонок: в левой колонке представлены уравнения электродинамики, а в правой колонке представлены уравнения линейной динамической теории упругости [27]

<i>электродинамика</i>	<i>теория упругости</i>	
$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \Phi, \quad \nabla \cdot \Phi = 0$		(I)
$\mathbf{j} = \nabla\varphi_* + \nabla \times \Phi_*, \quad \nabla \cdot \Phi_* = 0$ A.	$\frac{1}{\mu} \mathbf{F} = \nabla\bar{\varphi} + \nabla \times \bar{\Phi}, \quad \nabla \cdot \bar{\Phi} = 0$ B.	(II)
$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} \Phi_*$ A.	$\Delta\Phi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \bar{\Phi}$ B.	(III)
$\Delta\varphi = q, \quad \partial q / \partial t = -c\rho / \varepsilon_0,$ $\varphi_* = \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ A.	$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \bar{\varphi}$ B.	(IV)

Здесь принято: $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho_*$, $c_2^2 = \mu / \rho_*$, ρ_* — массовая плотность среды, λ и μ — постоянные Ламе, \mathbf{F} — объемная сила. Скорости c_1 и c_2 определяют скорости волн расширения и сдвига соответственно, причем положительность энергии деформации требует выполнения неравенства $c_1^2 > 4c_2^2/3$.

Напомню, что для уравнений теории упругости, в отличие от уравнений электродинамики, доказаны при достаточно общих предположениях теоремы существования

решений. Приступим к интерпретации уравнений электродинамики. В строке (I) вектор \mathbf{u} — это потенциал для электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей. В теории упругости \mathbf{u} — это вектор малых смещений, причем \mathbf{E} это безразмерная скорость, взятая с обратным знаком, а \mathbf{B} — ротор вектора перемещений, с которым в теории упругости обычно не работают, но можно работать и с ним. Вторая строка (II) не требует комментариев, кроме констатации, что ток \mathbf{j} в электродинамике аналогичен объемной силе в теории упругости. Аналогия в строке (III) является очевидной, если принять

$$c_2 = c, \quad \bar{\Phi} \longleftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0 c} \Phi_*.$$

Наибольшие различия содержатся в строке (IV). Собственно именно уравнения в этой строке и определяют различия между электродинамикой и механикой. В физике это трактуется как невозможность механистического истолкования электродинамики и, соответственно, как ограниченность механики. Естественнее, однако, считать, что некая странность содержится в уравнениях электродинамики, а вовсе не в уравнениях механики. В самом деле, смысл уравнения в правой колонке строки (IV) вполне очевиден, а потенциал φ существует для всякой величины $\bar{\varphi}$, т.е. для любой объемной силы \mathbf{F} . В электродинамике это не так. Ток \mathbf{j} не может быть произвольно задан, но вычисляется (частично) по потенциалу φ . В противном случае задача электродинамики может стать неразрешимой. А это обстоятельство заставляет усомниться в “почти идеально точном описании электромагнитных процессов” уравнениями Максвелла. Сказанного, однако, мало. В отличие от теории упругости потенциал φ в электродинамике не является решением волнового уравнения. А это означает, что потенциал φ в электродинамике устанавливается мгновенно во всем пространстве. Иными словами, в уравнениях Максвелла содержится бесконечная скорость распространения сигнала, что находится в вопиющем противоречии со специальной теорией относительности. Таким образом, СТО и электродинамика Максвелла не совместимы. Само собой разумеется, что в неустранимом противоречии с СТО находятся и уравнения теории упругости из-за наличия в них двух скоростей распространения сигнала. Да и вообще любая теория, содержащая более одной скорости распространения волн, несовместима с СТО. Для более ясного проявления аналогии в уравнениях (IV.A) и (IV.B), перепишем уравнения (IV.A) в эквивалентной форме

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \varrho - \frac{c}{\epsilon_0 c_1^2} \varphi_*, \quad \frac{c}{\epsilon_0} \varphi_* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{c}{\epsilon_0} \rho. \quad (48)$$

Первое из этих уравнений вполне аналогично уравнению (IV.B), если принять

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \bar{\varphi} \longleftrightarrow \frac{c}{\epsilon_0 c_1^2} \varphi_* - \varrho.$$

Теперь уже легко установить аналогию между объемной силой \mathbf{F} и током и зарядом

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{F} \longleftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0 c} \mathbf{j} - \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \nabla \varrho$$

Принятие связи $\varphi_* = (\epsilon_0/c) \partial^2 \varphi / \partial t^2$ означает принудительное задание части объемной силы, что, конечно, мало убедительно в механике, как, впрочем, и в электродинамике. Тем не менее, механистическое истолкование уравнений классической

электродинамики теперь уже просто очевидно и на нем больше можно не останавливаться. Ситуация становится совсем простой, если отсутствуют заряды и токи, а в теории упругости отсутствуют объемные силы. В этом случае строка (IV) принимает вид

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{IV.A}), \quad \Delta\varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (\text{IV.B})$$

Уравнение (IV.B) переходит в (IV.A) при $c_1 \rightarrow \infty$. При этом уравнения Максвелла становятся идентичными уравнениям колебаний несжимаемой среды, что и было отмечено самим Максвеллом [17, п. 784].

Заканчивая этот пункт, подчеркиваем, что механические аналогии для уравнений Максвелла оказались достаточно простыми и хорошо знакомыми всем механикам.

6 Модифицированные уравнения Максвелла

Как отмечалось выше, классические уравнения Максвелла имеют серьезный недостаток, а, именно, в них заключена бесконечная скорость распространения сигнала. К сожалению, это не единственный и далеко не самый важный недостаток классических уравнений, но об этом речь пойдет ниже. Здесь же приведем модифицированную систему уравнений Максвелла, в которой все сигналы распространяются с конечной скоростью. Для этого достаточно отказаться от связи, выражаемой вторым из уравнений (48). Тогда получим систему

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{\Phi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Phi} = 0; \quad (49)$$

$$\Delta\mathbf{\Phi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} \mathbf{\Phi}_*; \quad (50)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = q - \frac{c}{\varepsilon_0 c_1^2} \varphi_*, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{c}{\varepsilon_0} \rho, \quad c_1^2 > 4c^2/3, \quad (51)$$

где ток выражается формулой

$$\mathbf{j} = \nabla\varphi_* + \nabla \times \mathbf{\Phi}_*, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Phi}_* = 0. \quad (52)$$

Системе (49) – (52) можно придать более привычный для электродинамики вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_*}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c} \mathbf{j}_*, \quad (53)$$

где

$$\rho_* = \rho + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_* - \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right), \quad \mathbf{j}_* = \mathbf{j} - \nabla \left(\varphi_* - \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right). \quad (54)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнения (51), (52), чтобы получить замкнутую систему.

По внешнему виду система (53) весьма похожа на систему (41), но смысл ее существенно другой. Особенно это заметно в областях, где ρ и \mathbf{j} равны нулю.

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi_* = c(t), \quad \mathbf{\Phi}_* = \mathbf{0}.$$

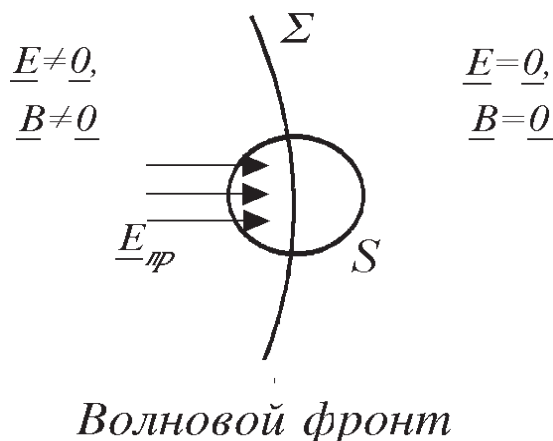


Рис. 1: Волновой фронт

В этом случае по классической системе (41) имеем, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. По существу именно здесь и спрятана бесконечная скорость распространения сигнала. В самом деле, вообразим следующую ситуацию. Пусть при $t < 0$ мы имели два одинаковых по величине, но разных по знаку, точечных заряда, которые при $t \leq 0$ находились в одной точке. В этом случае при $t \leq 0$ мы имеем $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Пусть далее в момент времени $t = 0$ заряды начинают разбегаться. Нетрудно убедиться, что в этом случае потенциал φ обязан быть отличным от нуля при $t > 0$. Если бы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} были бы представлены волнами, то была бы область, удаленная от зарядов, где поля \mathbf{E} и \mathbf{B} еще не возникли. Эта область отделена от области, где поля \mathbf{E} и \mathbf{B} уже возникли, некоей подвижной поверхностью Σ , называемой волновым фронтом — см. рисунок.

Выберем теперь замкнутую область, ограниченную поверхностью S . Согласно классическим уравнениям внутри S имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Для поперечных волн эти условия выполнены везде, в том числе и внутри S , т.е. для \mathbf{B} и части \mathbf{E} , представленной поперечной волной, эти условия выполнены. Но потенциал φ не может быть поперечной волной. Следовательно, на фронте волны $\nabla \cdot \mathbf{E}$ не может обращаться в нуль, ибо что-то входит внутрь S но ничего из нее не выходит. Противоречие исчезает, если мы примем, что φ — не волна и для φ нет волнового фронта. Так оно и есть в классической электродинамике — потенциал φ мгновенно устанавливается во всем пространстве. В модифицированной системе даже при отсутствии зарядов и токов $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. В следующем пункте будут представлены задачи, где все отмеченные обстоятельства будут видны совершенно отчетливо.

Модифицированная система (49) – (52) не может быть хуже классической, ибо последняя содержится в первой как частный случай. Наиболее “странной” особенностью системы (49) – (52) является то, что в ней присутствуют волны, распространяющиеся со скоростью $c_1 > c$. В следующем пункте будет показано, что электростатические поля устанавливаются именно с помощью этих волн. Поэтому модифицированная си-

стема уничтожает пропасть между электростатикой и электродинамикой, присущую классическим уравнениям Максвелла, в которых электростатика никогда не может быть получена из динамической задачи и существует как бы сама по себе. В математическом отношении система (49) – (52), можно сказать, безупречна. Но насколько реальны волны, описываемые уравнением (51), и чему равна скорость c_1 — это пока еще не установлено. Чисто интуитивно существование продольных волн (51), по крайней мере для меня, не вызывает никаких сомнений, ибо в противном случае возникают проблемы, решение которых не представляется возможным. В экспериментальном плане существование волн, распространяющихся быстрее света также неоспоримо. Этот факт был впервые установлен Н.А.Козыревым [21], а затем подтвержден со всей возможной тщательностью акад. М.М.Лаврентьевым и его сотрудниками [28, 29]. Суть эксперимента Козырева состоит в следующем. Он разработал датчик, который позволяет фиксировать разного рода излучения, не вдаваясь в природу этих излучений. С помощью этого датчика Козырев фиксировал потоки излучений от звезд. Когда он направлял телескоп на видимую звезду, то он фиксировал локальный максимум интенсивности излучения. Но самое поразительное состояло в том, что еще более интенсивное излучение Козырев фиксировал тогда, когда он направлял телескоп в то место неба, где звезда должна находиться в данное время и, соответственно, еще не видна. Свет из этого места придет к нам только в далеком будущем. Можно соглашаться или не соглашаться с объяснениями, даваемыми этому явлению Н.А.Козыревым. Однако неоспоримым является факт существования излучений, распространяющихся со скоростью намного превышающей скорость света. Разумеется, нет твердых оснований считать, что именно эти излучения описываются уравнением (51), но в принципе нельзя исключить такую возможность. В любом случае необходимо проведение специальных экспериментов по проверке системы (49) – (52) и определению скорости c_1 . Важно, что все экспериментальные данные, объяснимые с помощью классических уравнений, заведомо могут быть объяснены и модифицированными уравнениями.

Итак, модифицированная система не может быть хуже классической, а теоретически она несомненно лучше. Тем не менее, фундаментальная полнота как классической, так и модифицированной систем уравнений кажется более чем сомнительной. Интуитивно ясно, что явления магнетизма, если и описываются частично этими системами, то описываются неполно и в сильно искаженной форме. Здесь я не могу вдаваться во все детали и ограничусь только очевидными замечаниями, показывающими фундаментальную неполноту уравнений Максвелла. Для этого нужно принять во внимание факты, твердо установленные экспериментальной физикой.

Первый факт. Взаимодействие между ядром и электронами атома должно носить электромагнитную природу и потому должно описываться уравнениями электродинамики.

Второй факт. Всякий атом обладает смешанным дискретно-непрерывным спектром, который определяется экспериментально.

Стремление объяснить эти два факта привело к созданию квантовой физики. С точки зрения, принятой в данной работе, цельность атома и его строение (но не строение ядра или электронов) должно объясняться на основе уравнений второго эфира, т.е. уравнений электродинамики, но, конечно, не классической. Из механики известно — см., например, [30] — что смешанные спектры появляются в задачах весь-

ма специального вида при наличии двух основных факторов. Первый: наличие безграничной среды, оператор для которой имеет непрерывный спектр, лежащий выше некоторой частоты (частоты отсечки). Роль этой безграничной среды играет второй эфир. Примерами уравнений, заданных в безграничной среде, и имеющих частоту отсечки, являются, например, уравнения (36) или уравнения колебаний бесконечной балки (струны) на упругом основании. Для того, чтобы в уравнениях электродинамики для безграничной среды появилась частота отсечки, необходимо включить в рассмотрение спинорные движения, которые и ответственны за явления магнетизма. Иными словами, динамика второго эфира описывается уравнениями, которые определенным образом объединяют систему (49) – (52) с уравнениями типа (36). Вторым фактором: дискретный спектр появляется ниже частоты отсечки, если в поле оператора с непрерывным спектром внести дискретные частицы, роль которых играют ядра и электроны. Если ядро и электроны внести в классическое или модифицированное электромагнитное поле, то никаких дискретных (отделенных) частот не появится, поскольку и система (41) и система (49) – (52) не имеют частот отсечек. Последние появляются в волноводах, но это уже не безграничная среда. Таким образом, для объяснения строения атома уравнения электродинамики должны быть существенно изменены. Именно это и делается в квантовой электродинамике, но существуют и другие пути, не выходящие за рамки классической механики.

7 Иллюстративные задачи

Сходство и различие между классической и модифицированной системами уравнений проще всего увидеть на решениях конкретных задач. Сходство будет полным в тех задачах, в которых отсутствует продольный потенциал φ , т.е. электромагнитное поле описывается только поперечными волнами. Различие будет неустранимым в тех задачах, когда начальные и краевые условия требуют наличия потенциала φ , определяющего продольную волну.

В уравнения электродинамики входят как полярные векторы, так и аксиальные. Полярными являются векторы \mathbf{E} , \mathbf{u} , $\nabla\varphi$, \mathbf{j} , $\nabla\varphi_*$, $\nabla \times \Phi$, $\nabla \times \Phi_*$. Аксиальными являются векторы \mathbf{B} , Φ , Φ_* . Напомним определения групп симметрии полярных и аксиальных векторов [31, 32].

Определение: группой симметрии вектора \mathbf{a} называется множество ортогональных решений уравнения

$$(\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad (55)$$

где $\alpha = 0$, если \mathbf{a} полярный; $\alpha = 1$, если \mathbf{a} аксиальный. В (55) вектор \mathbf{a} задан, а ортогональные тензоры \mathbf{Q} ищутся. Это прямая задача. Обратная задача: по известным элементам симметрии, т.е. тензорам \mathbf{Q} , найти общий вид вектора \mathbf{a} , имеющего данные тензоры \mathbf{Q} своими элементами симметрии. При этом центральную роль играет принцип Кюри-Неймана [33], позволяющий заранее определить отдельные элементы симметрии (не всю группу симметрии) изучаемого объекта.

Принцип Кюри-Неймана: группа симметрии причины является подгруппой группы симметрии следствия.

Эти определения будут использованы ниже.

7.1 Задача Р.Фейнмана

Даны две непроводящие плоскости с поверхностными плотностями заряда σ_0 и $(-\sigma_0)$ соответственно. Плоскости приложены друг к другу вплотную, так что суммарная плотность заряда равна нулю. Ось, ортогональную этой плоскости, обозначим через z . В моменты времени $t \leq 0$ плоскости были неподвижны, так что поле отсутствовало $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V} = \mathbf{0}$.

В момент времени $t = 0$ плоскость σ_0 начинает двигаться вдоль второй (неподвижной) плоскости с зарядом $(-\sigma_0)$ со скоростью

$$\mathbf{v}(t) = v_0 [1 - e(t)] \mathbf{i}_1, \quad e(t) \equiv \exp\left(-2\pi\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau > 0, \quad (56)$$

где \mathbf{i}_1 — орт оси x — определяет направление движения, ортогональное \mathbf{i}_3 — орту оси z .

В данной задаче плотность заряда отсутствует, но ток имеется

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma_0 v_0 \delta(z) [1 - e(t)] \mathbf{i}_1.$$

Краевыми условиями являются условия отсутствия излучения с бесконечности ($z \rightarrow \pm\infty$).

В данной задаче плоскости $y = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной симметрии, а плоскости $x = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной антисимметрии. Это означает, что любой полярный вектор \mathbf{a} , встречающийся в данной задаче, должен иметь вид $\mathbf{a} = a(z, t) \mathbf{i}_1$, а любой аксиальный вектор \mathbf{b} должен иметь вид $\mathbf{b} = b(z, t) \mathbf{i}_2$. Поставленная задача есть почти точная формулировка задачи, рассмотренной Р.Фейнманом [25, с. 82–88]. Переход к задаче Фейнмана происходит при $\tau \rightarrow 0$. Нетрудно убедиться, что в данной задаче потенциалы φ и φ_* обязаны равняться нулю. Это означает, что классическая и модифицированная системы в данной задаче совпадают, причем потенциалы Φ_* и Φ имеют вид

$$\Phi_* = \Phi_*(z, t) \mathbf{i}_2, \quad \Phi = \Phi(z, t) \mathbf{i}_2.$$

Для $\Phi_*(z, t)$ получается выражение

$$\Phi_*(z, t) = -\sigma_0 v_0 \theta(z) [1 - e(t)], \quad \theta(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z > 0, \\ -\frac{1}{2}, & z < 0. \end{cases}$$

Уравнение (47) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \sigma_0 v_0 \theta(z) [1 - e(t)]. \quad (57)$$

Начальные условия однородны

$$\Phi(z, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (58)$$

Для векторов \mathbf{E} и \mathbf{V} имеем представления

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{V} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \mathbf{i}_2. \quad (59)$$

Ясно, что справедливо равенство $\Phi(z, t) = -\Phi(-z, t)$, т.е. \mathbf{E} — четная, а \mathbf{V} — нечетная функция z . Решение задачи (57), (58) не представляет затруднений и его можно не выписывать.

В этой задаче различие между классической и модифицированной системами отсутствует и они равноправны.

Оставшиеся задачи этого пункта уже будут иметь существенные различия и для каждой из них будут приведены решения с трех различных точек зрения.

7.2 Электромагнитное поле заряжаемой плоскости

Некоторые факты, присущие классической электродинамике, вызывают немалое удивление у человека, воспитанного в традициях классической механики. Прежде всего, это касается электростатики, которая входит в электродинамику как бы сама по себе. В механике любая статическая задача получается предельным переходом от соответствующей динамической задачи. Статическое состояние устанавливается в теле посредством тех или иных волн. В электродинамике это не так: электростатическое поле устанавливается мгновенно во всем пространстве. Другой факт. Р.Фейнман пишет [25, с. 78]: “Законы физики не дают ответа на вопрос: “Что случится если заряд внезапно возникает в этой точке, какие будут при этом электромагнитные эффекты?” Ответ дать нельзя, потому что наши уравнения утверждают, что такого не происходит. Если бы это случилось, нам понадобились бы новые законы, но мы не можем сказать какими бы они были...”. Для механика все это звучит странно. В механике мы внезапно прикладываем неизвестно откуда взявшиеся силы и наблюдаем реакцию системы на эти силы. Более того, от основных уравнений требуется, чтобы они были разрешимы при произвольно заданных внешних силах независимо от возможности существования подобных сил. Заряды и токи в электродинамике являются аналогами объемных сил в теории упругости. Поэтому с позиций механика удовлетворительная электродинамическая теория просто обязана давать однозначный ответ на вопрос Р.Фейнмана.

Простейшей задачей, позволяющей проанализировать указанные выше обстоятельства, является задача о нахождении электромагнитного поля заряжаемой плоскости. Рассмотрим непроводящую плоскость $z = 0$. Пусть ее поверхностная плотность заряда меняется по закону

$$\sigma(t) = \sigma_0 [1 - e(t)],$$

где $e(t)$ определяется выражением (56).

Здесь плоскость заряжается за время τ от нулевого значения плотности до значения σ_0 , если считать, что величина $\exp(-2\pi) = 1.87 \cdot 10^{-3}$ пренебрежимо мала в сравнении с 1. При $t \leq 0$ электрическое и магнитное поля отсутствовали. В данной задаче имеется два семейства плоскостей зеркальной симметрии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Поэтому все аксиальные векторы в этой задаче равны нулю

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \Phi = \mathbf{0}, \quad \Phi_* = \mathbf{0}.$$

При этом вектор электрического поля определяется выражением

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathcal{E}(z, t) \mathbf{i}_3 \Rightarrow \varphi = \varphi(z, t) \Rightarrow \varphi_* = \varphi_*(z, t).$$

Теперь возможны три разных точки зрения.

Первая: заряд и ток заданы, причем ток определяется движением зарядов. В этом случае имеем

$$\rho = \sigma_0 \delta(z) [1 - e(t)], \quad \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Здесь условие разрешимости (42) не выполнено и задача не имеет решения.

Вторая точка зрения: заряд задан, но ток \mathbf{j} подлежит определению. Эту позицию автору излагали многие физики, но она кажется уязвимой, т.к. в этом случае классическая система (41) не замкнута, хотя, как в данной задаче, в некоторых случаях она имеет однозначное решение. В самом деле, согласно (45) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\frac{c\sigma_0 \delta(z)}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} &= -\frac{c\sigma_0 \theta(z)}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right], \quad \theta(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z > 0, \\ -\frac{1}{2}, & z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда согласно (46) для тока имеем выражение

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \varphi_*}{\partial z} \mathbf{i}_3 = -\frac{2\pi\sigma_0 \theta(z)}{\tau} \exp\left(-2\pi \frac{t}{\tau}\right) \mathbf{i}_3.$$

Для электрического поля \mathbf{E} имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \mathbf{i}_3 = \frac{\sigma_0 \theta(z)}{\varepsilon_0} [1 - e(t)] \mathbf{i}_3. \quad (60)$$

В этом случае мы имеем ток \mathbf{j} , хотя в области $z \neq 0$, никаких зарядов не содержится. Кроме того, по (60) видим, что электрическое поле \mathbf{E} (как и ток \mathbf{j}) возникает мгновенно во всех точках пространства.

Наконец, третья точка зрения состоит в решении модифицированной системы уравнений (49)–(52). Здесь уже и заряд, и ток считаются заданными, причем ток \mathbf{j} равен нулю, т.к. никакого движения зарядов здесь нет: $\varphi_* = 0$.

Уравнение (51) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{c\sigma_0 \delta(z)}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right].$$

Очевидно, что потенциал $\varphi(z, t)$ является четной функцией z , причем он непрерывен при переходе через плоскость $z = 0$, а его первая производная терпит скачек

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=+0} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-0} = -\frac{c\sigma_0}{\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right] \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{c\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[t + \frac{\tau}{2\pi} e(t) \right].$$

Для электрического поля \mathbf{E} имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \mathbf{i}_3 \equiv \mathcal{E}(z, t) \mathbf{i}_3, \quad \mathcal{E}(z, t) = -\mathcal{E}(-z, t).$$

Для функции $\mathcal{E}(z, t)$ получили задачу

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}, \quad \mathcal{E}(z, t)|_{z=+0} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} [1 - e(t)], \quad \mathcal{E}(z, 0) = 0. \quad (61)$$

Решение уравнения (61) представимо в форме Даламбера-Эйлера

$$\mathcal{E}(z, t) = \psi(z - c_1 t) + f(z + c_1 t), \quad z > 0,$$

где $f(s)$ определена при $s \geq 0$, а функция $\psi(s)$ определена на всей оси $-\infty < s < \infty$. Поскольку излучение с бесконечности отсутствует, то $f(s) \equiv 0$. Из начального условия (61) имеем, что функция $\psi(s)$ обращается в нуль при положительных значениях аргумента. По краевому условию (61) получаем

$$\psi(-c_1 t) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} [1 - e(t)] \Rightarrow \psi(s) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[1 - e\left(-\frac{s}{c_1}\right) \right], \quad s \leq 0.$$

Итак, для $\mathcal{E}(z, t)$ получили выражение

$$\mathcal{E}(z, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[1 - \exp\left(2\pi \frac{z - c_1 t}{c_1 \tau}\right) \right], & z \leq c_1 t; \\ 0, & z \geq c_1 t. \end{cases} \quad (62)$$

Теперь можем сравнить решения (60) и (62). Формула (60) дает, что при $t \geq \tau$ во всей области $z \geq 0$ устанавливается электростатическое решение

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}, \quad (63)$$

причем оно устанавливается сразу во всем пространстве. Решение (62) показывает, что электростатическое решение (63) устанавливается при $t \geq \tau$ только в области $z < c_1(t - \tau)$, но при $z > c_1 t$ оно отсутствует. Поэтому модифицированная система показывает, что электростатическое решение устанавливается прохождением продольной волны, что полностью согласуется со здравым смыслом.

7.3 Электромагнитное поле растущего точечного заряда

Пусть в данной точке (начале координат) тела отсчета возникает заряд, меняющийся по закону

$$Q(t) = Q_0[1 - e(t)], \quad e(t) \equiv \exp\left(-2\pi \frac{t}{\tau}\right) \quad t \geq 0$$

и называемый точечным источником. Требуется построить возмущение, вносимое этим источником в электромагнитное поле. Физики предпочитают это возмущение называть собственно электромагнитным полем. Поставленную задачу, но при произвольном законе $Q(t)$, рассматривает Р.Фейнман [25, с. 145–147]. Читатель может сравнить решение, представленное ниже, с тем, что построено у Р.Фейнмана.

Задача обладает сферической симметрией, т.е. имеет две плоскости зеркальной симметрии. Это означает, что все величины, выражаемые аксиальными векторами, должны обращаться в нулевые векторы

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \Phi = \mathbf{0}, \quad \Phi_* = \mathbf{0}.$$

Сначала попытаемся решить эту задачу по классической системе (41) в предположении, что ток есть движение зарядов. Поскольку никаких движущихся зарядов здесь нет, то $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Решение строим в сферической системе координат. Тогда $\mathbf{E} = \mathcal{E}(r, t) \mathbf{e}_r$. Поскольку дивергенция \mathbf{E} при $r \neq 0$ равна нулю, то имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + \frac{2}{r} \mathcal{E} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}.$$

По теореме Гаусса находим $C(t)$ и с нею поле \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r. \quad (64)$$

По последнему из уравнений (41) находим, что $\partial \mathbf{E} / \partial t = \mathbf{0}$. Следовательно, по классической системе (41) и при $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ решение не существует, т.к. $dQ/dt \neq 0$. Р.Фейнман рассматривает именно этот случай, поэтому представленное им решение — формула (21.13) — решением не является.

Если же принять достаточно искусственную точку зрения, что ток не обязательно связан с движением зарядов, но определяется как дополнительное неизвестное, то решение у классической системы имеется, т.к. по последнему уравнению в (41) и (64) имеем

$$\mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dt} \mathbf{e}_r.$$

Несмотря на то, что формальное решение теперь появилось, но оно все равно неудовлетворительно с физической точки зрения, т.к. мгновенно возникает во всем пространстве.

Рассмотрим теперь эту задачу, используя модифицированную систему (49)–(52). Здесь ток считается движением зарядов, т.е. \mathbf{j} задан. В данной задаче имеем $\mathbf{j} = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi_* = 0, \Phi_* = \mathbf{0}$.

Для потенциала $\varphi = \varphi(r, t)$ имеем уравнение (51)

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + q; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{c}{\epsilon_0} \rho.$$

Это уравнение перепишем для функции $\psi(z, t) = \partial \varphi / c \partial t$

$$\Delta \psi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (65)$$

Электрическое поле вычисляется по формуле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r.$$

Здесь уже теорема Гаусса в классическом варианте не работает. Окружим начало координат малым шаровым объемом V_r , где $r \rightarrow 0$. Умножим обе части (65) на dV_r и проинтегрируем по области V_r . Тогда получим

$$\int_{V_r} \Delta\psi dV_r = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_r} \psi dV_r - \frac{1}{\epsilon_0} Q_0 [1 - e(t)]. \quad (66)$$

Используя теорему о дивергенции, имеем

$$\int_{V_r} \Delta\psi dV_r = \int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \nabla\psi dS_r = - \int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E} dS_r.$$

Устремляя теперь в (66) радиус r шара к нулю, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E} dS_r = \frac{Q_0}{\epsilon_0} [1 - e(t)]. \quad (67)$$

Это равенство и заменяет нам теорему Гаусса.

Запишем уравнение (65) в области $r \neq 0$. Получим

$$\frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial t^2} \Rightarrow r\psi(r, t) = f(r - c_1 t),$$

где учтено, что с бесконечности излучение не приходит. Поскольку при $t = 0$ поле отсутствовало, то $f(s) = 0$ при $s \geq 0$. Следовательно, функция $f(r - c_1 t)$ отлична от нуля только при отрицательных значениях аргумента $s = r - c_1 t$, т.е. в области $r < c_1 t$. Таким образом, для поля \mathbf{E} получили волновое представление

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f(r - c_1 t)}{r} \right] \mathbf{e}_r = \left[\frac{f(r - c_1 t)}{r^2} - \frac{f'(r - c_1 t)}{r} \right] \mathbf{e}_r.$$

Теперь имеем

$$\int_{S_r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E} dS_r = 4\pi [f(r - c_1 t) - rf'(r - c_1 t)].$$

Подставляя это выражение в (67), получаем

$$f(-c_1 t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} [1 - e(t)].$$

Отсюда находятся значения f при отрицательных значениях аргумента.

Окончательно имеем следующее решение

$$\mathbf{E}(r, t) = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(2\pi \frac{r - c_1 t}{c_1 \tau}\right) \right], & r \leq c_1 t; \\ 0, & r \geq c_1 t. \end{cases} \quad (68)$$

Из этого решения хорошо видно, что при $t > \tau$ в области $r < c_1(t - \tau)$ устанавливается квазистатическое решение (64), даваемое классической системой при предположении, что ток отличен от нуля. В решении (68) ток отсутствует.

7.4 Электромагнитное поле двух заряженных разбегающихся линий

Задачи 7.2 и 7.3 достаточно ясно иллюстрируют различие между классической и модифицированной системами, но в них заряды возникали ниоткуда, что не нравится физикам. Поэтому в данном пункте рассмотрим задачу, удовлетворяющую требованию сохранения заряда. Рассмотрим две однородно заряженные линии с линейной плотностью заряда σ и $(-\sigma)$. При $t < 0$ эти линии совпадали и покоились. Поэтому при $t < 0$ электромагнитное поле отсутствовало $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Ось y декартовой системы направим вдоль заряженных линий. В момент времени $t = 0$ линии начинают двигаться вдоль оси z с одинаковой скоростью, но в разные стороны. Скорость точки $y = 0$ линии с плотностью σ определяется законом

$$\mathbf{v}(t) = v_0 [1 - e(t)] \mathbf{i}_3 = v(t) \mathbf{i}_3, \quad e(t) \equiv \exp\left(-2\pi \frac{t}{\tau}\right).$$

Скорость линии с плотностью $(-\sigma)$ равна $(-v(t))$.

Вектор положения точки $y = 0$ линии с плотностью σ определяется выражением

$$\mathbf{r}(t) = v_0 \left[t - \frac{\tau}{2\pi} (1 - e(t)) \right] \mathbf{i}_3 \equiv \zeta(t) \mathbf{i}_3, \quad v(t) = \dot{\zeta}(t).$$

Для плотности заряда и тока имеем формулы

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma \delta(x) [\delta(z - \zeta) - \delta(z + \zeta)], \\ \mathbf{j} &= \sigma v(t) \delta(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)] \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

В данной задаче плоскости $y = \text{const}$ являются плоскостями зеркальной симметрии. Поэтому все полярные векторы должны иметь вид $\mathbf{a} = a_1(x, z, t) \mathbf{i}_1 + a_3(x, z, t) \mathbf{i}_3$, а все аксиальные векторы допускают представление $\mathbf{b} = b(x, z, t) \mathbf{i}_2$.

Таким образом, для потенциалов имеем

$$\varphi = \varphi(x, z, t), \quad \Phi = \Phi(x, z, t) \mathbf{i}_2, \quad \varphi_* = \varphi_*(x, z, t), \quad \Phi_* = \Phi_*(x, z, t) \mathbf{i}_2.$$

Для потенциалов φ_* и Φ_* имеем систему уравнений, следующую из уравнения (52)

$$\frac{\partial \varphi_*}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi_*}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} = \sigma v(t) \delta(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)]$$

или в другой форме

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_* &= \sigma v(t) \delta(x) [\delta'(z - \zeta) + \delta'(z + \zeta)] = -\partial \rho / \partial t, \\ \Delta \Phi_* &= \sigma v(t) \delta'(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)]. \end{aligned} \tag{69}$$

Из этих уравнений видим, что φ_* и Φ_* отличны от нуля всюду в пространстве. Именно это обстоятельство затрудняет суждение о характере решения.

Проще всего устанавливается волновой характер магнитного поля, поскольку для него имеем

$$\mathbf{B} = -\Delta \Phi = -\Delta \Phi \mathbf{i}_2 = \mathcal{B}(x, z, t) \mathbf{i}_2.$$

Теперь из уравнения (47) и второго уравнения (69) имеем

$$\Delta \mathcal{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} = \frac{\sigma v(t)}{\epsilon_0 c} \delta'(x) [\delta(z - \zeta) + \delta(z + \zeta)].$$

Волновой характер $\mathcal{B}(x, z, t)$ отсюда очевиден, т.к. в правой части стоят сосредоточенные на линиях $x = 0$, $z = \zeta(t)$ и $z = -\zeta(t)$ воздействия. Вне этих линий \mathcal{B} представляется решением волнового уравнения, т.е. \mathcal{B} это волны, поскольку начальные условия для \mathcal{B} однородны. Важно, что \mathcal{B} отлично от нуля только в области $x^2 + z^2 < c^2 t^2$ — см. [34], т.е. магнитное поле распространяется не мгновенно. Сказанное верно как для классической, так и для модифицированной систем, причем магнитное поле, определяемое по обеим системам одинаково.

Для электрического поля ситуация сложнее. Здесь классическую и модифицированную системы надо рассматривать раздельно.

Сначала рассмотрим классическую систему. Для нее электрическое поле заведомо не носит волнового характера в силу уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \delta(x)}{\epsilon_0} [\delta(z - \zeta) - \delta(z + \zeta)].$$

Отсюда видим, что не только $\nabla \cdot \mathbf{E}$ не является волной, но и само \mathbf{E} возникает сразу во всем пространстве. Это означает, что некоторая часть \mathbf{E} возникает мгновенно сколь угодно далеко от источника возмущений, т.е. налицо бесконечно большая скорость распространения сигнала. Теперь обратимся к модифицированной системе. Здесь потенциалы φ и Φ удовлетворяют волновым, но неоднородным, уравнениям (51) и (50). При этом в их правых частях содержатся потенциалы φ_* и Φ_* , которые отличны от нуля во всем пространстве. Поэтому неверно было бы утверждать, что φ и Φ локализованы в области $x^2 + z^2 < c^2 t^2$. Чтобы убедиться в волновом характере электрического поля, найденного по модифицированной системе, необходимо переписать последнее в терминах вектора \mathbf{u} . После несложных преобразований систему (49)–(52) можно переписать в эквивалентном виде

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{c_1^2 - c^2}{c^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{c_1^2}{c^2} \nabla q - \frac{1}{\epsilon_0 c} \mathbf{j}.$$

Дифференцируя это уравнение по времени и переходя от \mathbf{u} к \mathbf{E} , получаем

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{c_1^2 - c^2}{c^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c_1^2}{c^2} \nabla \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (70)$$

Теперь волновой характер \mathbf{E} очевиден. Левая часть этого уравнения есть хорошо известный оператор динамической теории упругости. В правой части уравнения (70) стоят воздействия, сосредоточенные на подвижных линиях. Задачи такого типа хорошо изучены [27] и их решениями являются волны, расходящиеся от подвижных линий. Если $v_0 < c$, то эти волны локализованы в области $x^2 + z^2 < c_1^2 t^2$. Поскольку $c_1 > c$, то электрическое поле в данный момент времени распространяется дальше, чем магнитное, причем в области $c^2 t^2 < x^2 + z^2 < c_1^2 t^2$ существуют только продольные волны, не порождающие магнитного поля. Таким образом, в качественном отношении решения модифицированной системы значительно лучше соответствуют здравому смыслу, нежели решения классической системы.

Заключение

Двадцатый век продемонстрировал огромный прогресс механики не только в области ее традиционных приложений, но и в области ее фундаментальных основ. Кое-что было просто уточнено, кое в чем механика была расширена в направлениях, указанных Л.Эйлером свыше 200 лет тому назад. В настоящее время возможности рациональной механики возросли настолько, что ей вполне по силам вплотную заняться проблемами электромагнетизма и строения атома. Направление этих исследований я пытался показать в данной работе. Кажется ясным, что построение формальных теорий эфиров и, в частности, новой теории электромагнитных явлений, не сводящейся к обсужденной в тексте статьи, будет выполнено в самое ближайшее время. Главные трудности в том, как описать взаимодействие эфиров между собой и взаимодействие эфиров с макротелами. Первоочередной задачей является ответ на вопрос, что такое заряд, т.е. чем отличается заряженное тело от незаряженного. Разумеется, ответ должен иметь не словесную форму, но должен быть выражен в виде неких формальных структур, задаваемых в механике. Здесь еще все покрыто туманом, рассеять который и должна рациональная механика в грядущем веке.

К сожалению, большинство механиков полагают, что у механики достаточно своих проблем, и потому они самоустраняются от анализа труднейших проблем новейшей физики. Мне кажется, что это опасная тенденция. Те, кто следят за развитием науки, легко заметят как стремительно снижается роль и значение механики в исследовательских и образовательных программах. Некоторые исследователи вообще перестали считать механику фундаментальной наукой. Ошибочность подобных воззрений проявится очень скоро, но восстанавливать престиж механики будет не легко. Единственный шанс для механики сохранить роль фундаментальной науки состоит в активном внедрении в разработку проблем новейшего естествознания в широком смысле.

Благодарность. Автор глубоко благодарен Т.П.Товстик за огромную помощь при подготовке рукописи к печати.

Список литературы

- [1] Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985. 379 с.
- [2] Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 437 с.
- [3] Эйнштейн А. Автобиографические заметки. Собр. научных трудов, т. IV, с. 259–293. М.: Наука, 1967. 599 с.
- [4] Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики. В сб. Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем. Тр. XXII школы-семинара. С.-Петербург, 1995, с. 14–40.
- [5] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

- [6] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983. 559 с.
- [7] Эйнштейн А. Неевклидова геометрия и физика. В сб. "Эйнштейн и развитие физико-математической мысли." с. 5–9. М.: Изд. АН СССР, 1962. 239 с.
- [8] Zarembo S. Réflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle. Enseignements Math., 1940, t. 38, p. 59–69.
- [9] Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. В сб. Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, № 448, с. 3–38. С.-Петербург, 1994.
- [10] Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. Собр. научных трудов А.Эйнштейна, т. IV, с. 357–543.
- [11] Пуанкаре А. Измерение времени. Избр. труды А.Пуанкаре, т. III, с. 419–428. М.: Наука, 1974. 771 с.
- [12] Дирак П.А.М. Воспоминания о необычной эпохе. М.: Наука, 1990. 207 с.
- [13] Лоренц Г. Теории и модели эфира. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 68 с.
- [14] Беллони Л. Заметка В.Паули о сверхтонкой структуре, опубликованная в 1924 г. Сб. Физика за рубежом. Серия Б. с. 166–177. М.: Мир, 1984. 207 с.
- [15] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т. 2, Пространство. Время. Движение. М.: Мир, 1965 г. 168 с.
- [16] Фарадей М. Исследования по электричеству. Изд. АН СССР. т. I, 1947, 848 с.; т. II, 1951, 538 с.; т. III, 1959, 831 с.
- [17] Максвелл Дж. Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука, 1989, т. I (416 с.), т. II (436 с.).
- [18] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд. АН СССР, 1959 г. 386 с.
- [19] Архимед. Исчисление песчинок (Псаммит). М.-Л.: ГТТИ, 1932 г. 104 с.
- [20] Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением к геометрии кривых. – В кн. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937 г. с. 25–166.
- [21] Козырев Н.А. Избранные труды. Л.: Изд. ЛГУ, 1991 г. 445 с.
- [22] Cosserat E. et F. Theorie des Corps Deformables. Paris. 1909.
- [23] Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М.: Изд. МГУ, 1963 г. 367 с.
- [24] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies. ZAMM – Z. angew. Math. Mech. 76 (1996), № 4, pp. 187–204.

- [25] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т. 6, Электродинамика. М.: Мир, 1966 г. 343 с.
- [26] Тимирязев А.К. Введение в теоретическую физику. М.-Л.: ГТТИ, 1933 г. 440 с.
- [27] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975 г. 832 с.
- [28] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О дистанционном воздействии звезд на резистор. ДАН СССР, 1990 г. т. 314, № 2 с. 352–355.
- [29] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Медведев В.Г., Олейник В.К., Фоминых С.Ф. О сканировании звездного неба датчиком Козырева. ДАН СССР, 1992, т. 323, № 4, с. 649–652.
- [30] Абрамян А.К., Индейцев Д.А. Особенность колебаний динамических систем, имеющих несущую конструкцию бесконечной протяженности РАН Сиб. Отделение, Моделирование в механике, 1982 г., т. 6.
- [31] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 386, 1982, с. 29–46.
- [32] Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория простых упругих оболочек. Успехи механики, 1988, т. II, Вып. 4, с. 107–148.
- [33] Най Дж. Физические свойства кристаллов. М.: Мир, 1967 г. 386 с.
- [34] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966 г. 351 с.

Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании*

Аннотация

В статье представлена постановка задач динамики твердого тела на нелинейно упругом основании. Вводится общее определение потенциального момента. Обсуждается метод возмущений на множестве собственно ортогональных тензоров. Даются примеры решения конкретных задач.

1 Введение

Известна роль, которую играет обычный осциллятор в ньютоновской механике. В эйлеровской механике аналогичную роль играет твердое тело на упругом основании. Такая система может быть названа твердотельным осциллятором. Последний необходим при построении динамики мультиполярных сред, но в общем случае в литературе не только не исследован, но даже и не описан. Хотя частные случаи твердотельного осциллятора, конечно, рассматривались, например, при анализе ядерного магнитного резонанса, а также в многочисленных работах прикладного характера, но при малых углах поворота.

Во введении к статье [1] описана постановка задач динамики твердого тела в терминах тензора поворота и вводится в рассмотрение вектор поворота, но практически он не применяется. Между тем, определение, например, потенциального момента или задание энергии деформации упругого основания требует применения вектора поворота. Поэтому в п. 2 данной статьи приводится подробное описание вектора поворота и его применений. В п. 3 дается вывод уравнений движения твердотельного осциллятора. В п. 4 приводится пример точного интегрирования уравнений динамики твердого тела на нелинейно упругом основании. Метод интегрирования любопытен тем, что приходится использовать одновременно обе системы основных уравнений через левую и правую угловые скорости. Пункты 5 – 8 посвящены анализу устойчивости положения равновесия при различных типах внешнего момента.

*Жилин П.А. Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании // Труды XXIV летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1997. С. 90–122.

2 Математические приготовления

Ниже дается краткая сводка математического аппарата, используемого в основном тексте статьи. Большая часть приводимых формул публикуется впервые.

2.1 Вектор поворота. Тензор-интегратор

Большую роль в динамике твердого тела играет тензор поворота и его представления. Основные сведения о тензоре поворота изложены во вводной части статьи [1]. Там же доказана основная теорема о представлении тензора поворота, и введен в рассмотрение вектор поворота, причем последний в литературе, включая [1], практически не применяется. Между тем, существуют обширные классы задач, которые без применения вектора поворота трудно даже сформулировать, не говоря уже об их решении. По этой причине ниже приводятся некоторые факты, относящиеся к вектору поворота и его применению.

Тензор поворота будет обозначаться символом $\mathbf{P}(t)$ или $\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n})$. Справедлива теорема Эйлера [1]

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n}) = (1 - \cos \theta)\mathbf{nn} + \cos \theta\mathbf{E} + \sin \theta\mathbf{n}\times\mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n})$ означает поворот на угол θ вокруг \mathbf{n} , вектор $\theta\mathbf{n}$ называется вектором поворота. Часто вместо (1) удобнее использовать представление через логарифмический тензор поворота \mathbf{R}

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n}) = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta}\mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\mathbf{R}^2 = \exp \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \theta\mathbf{n}\times\mathbf{E} \quad (2)$$

В представлении (2), в отличие от (1), величина θ может рассматриваться как модуль вектора θ , т.е. $\theta = |\theta| \geq 0$. Справедливы формулы

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr} \mathbf{Q}, \quad -2 \frac{\sin \theta}{\theta}\theta = \mathbf{Q}_\times, \quad (\mathbf{ab})_\times = \mathbf{a}\times\mathbf{b} \quad (3)$$

Рассмотрим композицию поворотов

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{p})\cdot\mathbf{Q}(\beta\mathbf{q}), \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1 \quad (4)$$

Вектор поворота композиции вычисляется по формулам

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}), \quad (5)$$

$$2 \sin \theta\mathbf{n} = [\sin \alpha(1 + \cos \beta) - (1 - \cos \alpha) \sin \beta (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\mathbf{p} + [\sin \beta(1 + \cos \alpha) - \sin \alpha(1 - \cos \beta)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\mathbf{q} + [\sin \alpha \sin \beta - (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\mathbf{p}\times\mathbf{q} \quad (6)$$

Следует обратить внимание на достаточно сложный характер суммарного угла поворота. Например, если $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, то $\theta = \alpha + \beta$, что вполне естественно. Однако, если $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 0$, то из (5) следует довольно неожиданный вывод: если $\beta = \pi$, то $\theta = \pi$

независимо от угла α . В этом случае от угла α зависит вектор \mathbf{n} , который находится по (6) после раскрытия неопределенности. Левая (истинная) $\boldsymbol{\omega}$ и правая $\boldsymbol{\Omega}$ угловые скорости находятся по уравнениям Пуассона [1]

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (\dot{f} = df/dt) \quad (7)$$

Важную роль играют формулы, связывающие угловые скорости с производной от вектора поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}(\theta) \cdot \dot{\theta}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \dot{\theta} \quad (8)$$

или в обращенной форме

$$\dot{\theta} = \mathbf{Z}^{-1}(\theta) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\theta} = \mathbf{Z}^{-T}(\theta) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (9)$$

причем для тензора-интегратора $\mathbf{Z}^{-1}(\theta)$, играющего роль интегрирующего множителя, справедливы представления

$$\mathbf{Z}(\theta) = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2, \quad \det \mathbf{Z} = 2(1 - \cos \theta)/\theta^2 \quad (10)$$

$$\mathbf{Z}^{-1}(\theta) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2} \mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (\theta \neq 2\pi s) \quad (11)$$

Обратим внимание, что при $\theta = 2\pi s$ ($s = 1, 2, \dots$) тензор $\mathbf{Z}(\theta)$ необратим.

$$\mathbf{Z}(2\pi m) = \mathbf{m}\mathbf{m} \quad \implies \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}(2\pi m) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{m}$$

Это обстоятельство не должно удивлять. На самом деле модуль вектора поворота может достигать значения 2π только в том случае, если вращение происходит вокруг фиксированной во времени и пространстве оси. Доказательство этого интуитивно очевидного факта мне неизвестно. Однако, легко доказывается, что если $|\theta| \gg 1$, то вращение происходит вокруг фиксированной оси. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть выражение

$$\cos \eta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} = \frac{\dot{\theta} \cdot \mathbf{Z} \cdot \dot{\theta}}{\dot{\theta} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \dot{\theta}} = \frac{\theta^4 |\dot{\theta}|^2 - [\theta^2 - \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2] |\boldsymbol{\theta} \times \dot{\theta}|^2}{\theta^4 |\dot{\theta}|^2 - [\theta^2 - \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)^2] |\boldsymbol{\theta} \times \dot{\theta}|^2}$$

Отсюда видно, что при больших θ^2 справедливы пределы

$$\theta^2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \cos \eta \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \eta \rightarrow 0$$

Это означает, что при больших θ^2 справедливо равенство

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \text{const}$$

Наш собственный опыт показывает, что в случае неодноосных вращений модуль вектора поворота не превышает значения π . Впрочем, наш опыт не так уж и значителен.

При вычислениях полезны формулы

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}^{2k+1} = (-\theta^2)^k \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^{2k} = (-\theta^2)^{k-1} \mathbf{R}^2, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Тензор-интегратор \mathbf{Z} обладает многими замечательными свойствами. Перечислим некоторые из них.

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{Z}^\top = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z}, \quad (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}) \quad (12)$$

Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ является гиротропной функцией вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad \forall \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = +1 \quad (13)$$

Если $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$, где $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, то

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}^\top \implies \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{P}^\top \quad (14)$$

Пользуясь (12) – (14), можно вывести много других тождеств. Например,

$$\mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Z}^{-\top} \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z}^{-\top} \quad (15)$$

При выводе многих уравнений тождества (12) – (15) чрезвычайно облегчают выкладки.

В заключение этого пункта приведем вывод первой из двух формул (8). Вычисляя след от обеих частей левого уравнения Пуассона и учитывая (3), получаем

$$\text{tr } \dot{\mathbf{P}} = (\text{tr } \mathbf{P}) \cdot = (1 + 2 \cos \theta) \cdot = -2 \dot{\theta} \sin \theta = \text{tr}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = -\frac{2 \sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Отсюда имеем

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \theta \dot{\theta} = \frac{1}{2} (\theta^2) \cdot = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (16)$$

Умножая обе части левого уравнения Пуассона (8) скалярно на вектор поворота и учитывая равенство $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot - \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}$$

Умножая обе части последнего равенства векторно на $\boldsymbol{\theta}$, получаем с учетом (17)

$$\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega} \theta^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \theta^2 - \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{E} - \mathbf{P}) + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\theta^2} [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{P}) + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Подставляя сюда выражение (2) и учитывая тождество

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E}$$

получаем искомую формулу (8).

2.2 Потенциальные или консервативные моменты

Введем понятие консервативного момента, необходимость в котором возникает во многих задачах, но которое, видимо, до сих пор не было введено в общем случае.

Определение: момент \mathbf{M} называется потенциальным или консервативным, если существует такая скалярная функция $U(\boldsymbol{\theta})$, зависящая только от вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$, что выполняется равенство

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{U}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (17)$$

Из этого определения немедленно следует, что

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} \quad (18)$$

Определение: консервативный момент называется позиционным, если он зависит только от вектора поворота в данный момент времени, т.е. в (18) следует принять $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$.

Включение в определение консервативного момента слагаемого, зависящего от скорости, оправдывается следующими обстоятельствами. Первое: именно (18) следует из определения (17). Второе: включение члена, зависящего от скорости, не препятствует сохранению энергии. Третье: включение слагаемого, зависящего от скорости, где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ следует понимать как функционал от векторов поворота и угловой скорости, оказывается необходим при учете (частичном) инерционных свойств упругого основания.

Для практических целей важными оказываются частные случаи потенциала $U(\boldsymbol{\theta})$.

Определение: потенциал $U(\boldsymbol{\theta})$ называется трансверсально изотропным с осью изотропии \mathbf{k} , если равенство

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U(\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}) \quad (19)$$

выполняется для любого тензора поворота $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k})$. Найдем общий вид трансверсально изотропного потенциала. Для этого рассмотрим непрерывно дифференцируемое семейство тензоров $\mathbf{Q}(\alpha(\tau) \mathbf{k})$, где τ — параметр семейства. Продифференцируем теперь (19) по параметру τ и учтем, что левая часть (19) от τ не зависит. Тогда получим

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}'}{d\tau} = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot (\alpha \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}') = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' \equiv \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Таким образом трансверсально изотропный потенциал должен удовлетворить условию

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = \psi_1 \mathbf{k} + \psi_2 \boldsymbol{\theta},$$

где ψ_1 и ψ_2 скалярные функции $\boldsymbol{\theta}$. Умножая последнее равенство скалярно на $d\boldsymbol{\theta}$, получаем

$$dU = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \psi_1 d(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \psi_2 d(\boldsymbol{\theta}^2)$$

Отсюда видим, что трансверсально изотропный потенциал есть функция двух аргументов

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^2) \quad (20)$$

Если $U(\boldsymbol{\theta})$ есть функция только от θ^2 , то такой потенциал называется изотропным. По (20) имеем

$$\frac{dU}{d\theta} = 2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \quad (21)$$

Следовательно, согласно (18) позиционный консервативный момент имеет вид

$$\mathbf{M} = -2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} \quad (22)$$

Для изотропного потенциала в этом выражении сохраняется только первое слагаемое в правой части. Отметим очевидные тождества, справедливые для любого вектора \mathbf{a} .

$$(\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$$

С учетом этих тождеств и равенства (22) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{M} &= -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-T}) \cdot \mathbf{k} = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

Умножая это равенство скалярно на \mathbf{k} , получим

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (23)$$

Это равенство справедливо для любого трансверсально изотропного потенциала. Для изотропного потенциала (23) справедливо для любого вектора \mathbf{a} , а не только для \mathbf{k} .

2.3 Метод возмущений на множестве собственно ортогональных тензоров

Поскольку возмущенные тензоры поворота не должны выходить за пределы собственно ортогональной группы, то это налагает определенные ограничения на всю технику метода возмущений. Существует несколько способов возмущения тензоров поворота. Один из них изложен в [2]. Здесь будет использована другая техника, основанная на том факте, что векторы поворота являются элементами линейного пространства и на их возмущения никаких ограничений не налагается.

Возмущенный тензор поворота определим равенством

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \exp \mathbf{R}_\varepsilon = \exp[\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}], \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (24)$$

где вектор $\boldsymbol{\varphi}$ называется вариацией вектора поворота. Рассматривая параметр ε как независимую переменную, вводим левую $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ и правую $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$ скорости возмущения.

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \mathbf{P}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \mathbf{P}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{P}_\varepsilon \times \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \quad (25)$$

Возмущенные угловые скорости вычисляются по тензору \mathbf{P}_ε .

$$\dot{\mathbf{P}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{P}_\varepsilon, \quad \dot{\mathbf{P}}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \quad (26)$$

Выписывая условия интегрируемости (25) и (26), приходим к уравнениям структуры Картана

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon + \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad (27)$$

Для скоростей возмущения имеем формулы аналогичные (8).

$$\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^T \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon / \partial \varepsilon \quad (28)$$

Возмущенные угловые скорости находятся по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^T \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon$$

Если $\boldsymbol{\theta}_0$ не зависит от времени (положение равновесия), то

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^T \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon \quad (29)$$

Пусть дана функция $f(\varepsilon, t)$. Величина

$$f(t)^* = [\partial f(\varepsilon, t) / \partial \varepsilon]_{\varepsilon=0}$$

называется первой вариацией функции $f(\varepsilon, t)$. Для первых вариаций тензора поворота и скоростей имеем

$$\mathbf{P}^* = \boldsymbol{\eta}_0 \times \mathbf{P}_0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{Z}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad (30)$$

где индексами 0 отмечены невозмущенные величины, но $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}|_{\varepsilon=0}$. Аналогичные формулы справедливы для правых величин

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_0 \times \boldsymbol{\zeta}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{Z}_0^T \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0 - \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{\zeta}|_{\varepsilon=0} \quad (31)$$

Если возмущения накладываются на равновесные (статические) состояния, то $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 = 0$. Отметим формулы для первой вариации модуля вектора поворота

$$\theta^* = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}_0 \quad (32)$$

3 Постановка задачи. Основные уравнения

Вообразим следующую ситуацию. Пусть дан тонкий стержень, расположенный вдоль орта \mathbf{k} . Пусть его нижний конец закреплен от смещений в неподвижной точке O , которую примем за начало в инерциальной системе отсчета. Пусть, наконец, рассматриваемый воображаемый стержень удерживается от поворотов упругим основанием рис.1. Когда стержень направлен вертикально и не повернут вокруг своей оси, упругое основание считается недеформированным. Насадим теперь на воображаемый стержень твердое тело произвольного вида. Тогда воображаемый стержень станет некой материальной осью в теле, упруго защемленной в упругое основание. Положение тела, при котором упругое основание недеформировано, будем называть

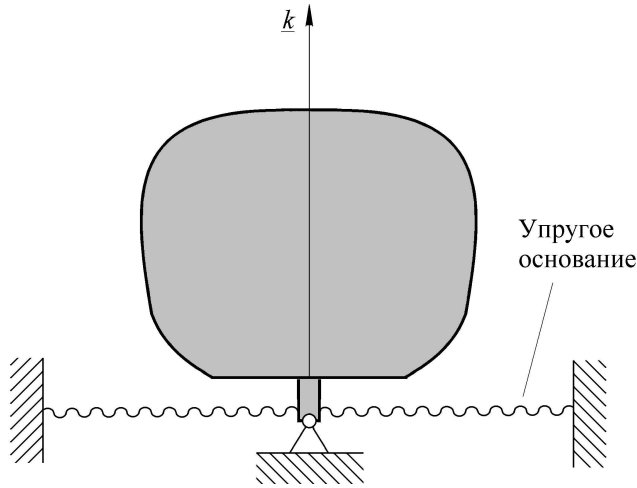


Рис. 1: Твердое тело на упругом основании

отсчетным. Тензор инерции тела в отсчетном положении, вычисленный относительно неподвижной точки O , будем обозначать символом \mathbf{A} . Тензор \mathbf{A} симметричен и положительно определен. Вектор вертикали \mathbf{k} не обязан совпадать с главной осью \mathbf{A} . Ситуация такого рода возникает в динамике неуравновешенных центрифуг. Правда в дальнейшем считается, что ротор жестко закреплен в статоре. В динамике центрифуг вместо твердого тела нужно рассматривать гироскоп, что, конечно, вносит некоторые технические усложнения, но для целей данной работы эти усложнения совершенно излишни.

Важное значение имеет случай трансверсально изотропного тензора инерции с осью изотропии \mathbf{k} . В этом случае тензор \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = A_1(\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\mathbf{k} \quad (33)$$

где A_1, A_3 — экваториальный и осевой моменты инерции, вычисленные относительно осей, проходящих через неподвижную точку O .

В актуальном положении тела, т.е. в положении тела в данный момент времени, тензор инерции находится по формуле

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(t) = A_1(\mathbf{P} - \mathbf{k}'\mathbf{k}') + A_3\mathbf{k}'\mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} \quad (34)$$

Первый знак равенства здесь относится к тензору \mathbf{A} общего вида, а второй знак равенства относится к трансверсально изотропному тензору инерции. В представлении (34) символом \mathbf{P} обозначен тензор поворота тела. Кинетический момент определяется выражением

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = A_1\boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1)(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{k}' \quad (35)$$

или

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P} \cdot [A_1\boldsymbol{\Omega} + (A_3 - A_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{k}] \quad (36)$$

В (35) используется левая угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а в (36) правая угловая скорость.

Упругое основание будем характеризовать упругим потенциалом $U(\boldsymbol{\theta})$. Тогда упругий момент, действующий со стороны основания на тело, определяется выражением (18)

$$\mathbf{M}_e = -\mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad (37)$$

где последнее слагаемое в правой части в дальнейшем будет игнорироваться. Если потенциал $U(\boldsymbol{\theta})$ трансверсально изотропен, то выражение (37) упрощается см.(21) – (22).

$$\mathbf{M}_e = -2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} - \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} \quad (38)$$

Оно еще больше упрощается для изотропного основания, у которого $\partial U / \partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено неравенство

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad \forall \mathbf{a} : |\mathbf{a}| \neq 0, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} = & 2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2) \partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\boldsymbol{\theta} \mathbf{k} + \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}) + \\ & + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2) \partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \partial(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k})} \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (40)$$

Второй закон динамики Эйлера записывается в форме

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{Z}^{-T} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{ext}, \quad (41)$$

где \mathbf{M}_{ext} — внешний момент, вычисленный относительно неподвижной точки O. Через правую угловую скорость уравнение (41) записывается следующим образом

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{ext}, \quad (42)$$

где использовано тождество (15). Внешний момент представим в виде суперпозиции потенциальной и непотенциальной части

$$\mathbf{M}_{ext} = -\mathbf{Z}^{-T} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{ex}. \quad (43)$$

Тогда уравнение (42) можно переписать в виде

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{\partial(U + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{M}_{ex} \quad (44)$$

К уравнениям (41) или (44) необходимо добавить одно из двух уравнений связи

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-T} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (45)$$

а также начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (46)$$

Основными неизвестными в принятой постановке задачи является вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ или $\boldsymbol{\Omega}$.

4 Движение твердого тела на изотропной упругой опоре

В качестве иллюстрации рассмотрим простейшую задачу о движении твердого тела с шаровым тензором инерции на изотропной упругой опоре

$$\mathbf{A} = A\mathbf{E}, \quad \mathbf{U} = u(\theta^2), \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = 2u'(\theta^2)\boldsymbol{\theta} = c(\theta^2)\boldsymbol{\theta}, \quad (47)$$

где штрих означает производную по аргументу θ^2 . Уравнения (42) и (43) принимают вид

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + b\boldsymbol{\omega} + c(\theta^2)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad A\dot{\boldsymbol{\Omega}} + b\boldsymbol{\Omega} + c(\theta^2)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (48)$$

В уравнения (48) добавлен момент трения $\mathbf{M}_f = -b\boldsymbol{\omega}$, где $b = \text{const}$, $b > 0$. Разумеется, уравнения (48) не являются независимыми. К уравнениям (48) следует добавить уравнения (45).

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (49)$$

и начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \quad (\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}_0) \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \quad (50)$$

Систему (48) – (50) можно решать либо с использованием левой угловой скорости (первые уравнения системы), либо с использованием правой угловой скорости (вторые уравнения системы). Система (48) – (49) существенно нелинейна. Чтобы подчеркнуть различие в подходах к решению этой системы, рассмотрим сначала классический подход. При этом обычно работают с правыми угловыми скоростями. Кроме того, используют какую-либо систему параметров для представления тензора поворота. Наиболее популярной является система углов Эйлера, которой мы и воспользуемся.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \quad (51)$$

где

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (52)$$

Для нахождения вектора поворота через углы Эйлера следует воспользоваться формулами (5), (6). Тогда система (48) – (49) эквивалентна следующим трем уравнениям для углов Эйлера ψ, ϑ, φ

$$\begin{aligned} A[\dot{\beta} - \dot{\psi}(1 - \cos \vartheta)] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta (1 + \cos \vartheta) &= 0 \\ A[\ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \vartheta (1 + \cos \beta) &= 0 \\ A[(\dot{\psi} \sin \vartheta) - \dot{\varphi} \vartheta] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta \sin \vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Дополнительно имеем уравнение связи (5) для выражения θ через ϑ и β

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \vartheta + \cos \beta + \cos \vartheta \cos \beta, \quad \beta = \varphi + \psi \quad (54)$$

В системе (53) принято, что $\mathbf{b} = 0$, т.е. трение отсутствует. Система (53) – (54) достаточно неприятна, и нам не удалось сколь-нибудь полно проанализировать ее.

Показательно, что при выводе (53) мы воспользовались априорным представлением (51) для тензора поворота. Оно допустимо, равно как совершенно правильной является система (53) – (54). Можно было бы воспользоваться какой-либо другой системой углов, но неизменным остался бы априорный характер выбора представления для тензора поворота. Между тем, этот выбор является чрезвычайно важным. На самом деле в каждой задаче тензор поворота должен представляться только в одной форме, если мы хотим получить обозримое решение. Это единственное представление должно не угадываться, а определяться в процессе решения задачи. Именно это обстоятельство подчеркивалось в работе [1]. Там выбор представления для тензора поворота определялся строением интеграла энергии. Для рассматриваемой нами системы (48) – (49) интеграла энергии нет. Однако, существуют интегралы другого типа. Покажем, как интегрируется система (48) – (49).

Из уравнений (48) следует, что

$$A(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})' + \mathbf{b}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = \exp\left(-\frac{\mathbf{b}}{A}t\right)(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \quad (55)$$

Таким образом получили три интеграла. Теперь возможны два случая

$$\text{a) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{b) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0| \mathbf{e} \neq 0$$

В первом случае решение элементарно, поскольку (55) дает

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\theta}(t)$$

Подставляя это выражение в (48) и (49), получаем

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0, \quad \dot{\theta} = \lambda(t)\theta(t)$$

Из второго уравнения этой системы следует, что вектор поворота неизменен по направлению. Поэтому векторные уравнения сразу переписываются в скалярной форме

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0, \quad \dot{\theta} = \lambda\theta, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const} \quad (56)$$

Второе уравнение этой системы служит для определения функции λ , которая мало интересна. Первое уравнение легко интегрируется в случаях: а) $\mathbf{b} = 0$, $c(\theta^2) > 0$ — любая функция; б) $c(\theta^2) = c = \text{const}$ — линейно упругое основание. Качественный анализ системы (56) очевиден и хорошо известен.

Обратимся к случаю, когда $\boldsymbol{\omega}_0 \neq \boldsymbol{\Omega}_0$. Из уравнения (49) следует, что

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \quad (57)$$

С учетом (55) это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{g}(\theta) \exp\left(-\frac{\mathbf{b}}{A}t\right)(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \quad (58)$$

С учетом формул (8) правую часть (58) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) = \sin \theta \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Тогда уравнение (58) примет вид

$$\frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{b}{A}t\right) \quad (59)$$

Из этого уравнения видно, что вектор $\boldsymbol{\theta}$ лежит в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. Следовательно, его можно представить в виде

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}_0 / \theta_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad (60)$$

где \mathbf{e} есть орт вектора $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. Из (60) сразу следует, что

$$\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \theta^2 \mathbf{e} \quad (61)$$

Подставляя (61) в (59), получаем

$$\dot{\psi} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|}{2(1 - \cos \theta)} \exp\left(-\frac{b}{A}t\right) > 0$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\dot{\psi} = \frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta} \dot{\psi}_0 \exp\left(-\frac{b}{A}t\right), \quad \dot{\psi}_0 > 0 \quad (62)$$

Получим уравнение для нахождения угла поворота θ . Для этого вычислим правую угловую скорость

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta} - (1 - \cos \theta) \dot{\psi} \mathbf{e}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (48) и проецируя получившееся уравнение на вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, вектор \mathbf{e} и вектор $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$, получаем три скалярных уравнения. Причем, проекции на \mathbf{e} и $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$ оказываются тождествами в силу (62), а проекция на $\boldsymbol{\theta}$ дает уравнение для угла поворота θ

$$A(\ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\psi}^2) + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0 \quad (63)$$

Если трение отсутствует, т.е. $b = 0$, то уравнение (63) с учетом (62) допускает решение в квадратурах. При этом, в частности, уравнение (63) показывает существование регулярной прецессии тела на упругом основании. Скорость прецессии $\dot{\psi}$ постоянна и определяется выражением

$$\dot{\psi}^2 = \frac{c(\theta^2)\theta}{A \sin \theta}, \quad \theta = \text{const} \quad (64)$$

Регулярная прецессия относится к случаю, когда ось поворота и ось вращения тела ортогональны между собой

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$$

При наличии трения уравнение (63) допускает ясное качественное исследование, но не интегрируется в квадратурах даже для линейного упругого основания, когда $c(\theta^2) = c = \text{const}$.

Согласно (60) для тензора поворота имеем представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{e}) \quad (65)$$

Как видим, это выражение отличается от (51) если $\mathbf{e} \neq \mathbf{k}$. При этом углы θ и ψ также являются углами Эйлера, причем угол собственного вращения φ равен $\varphi = -\psi$. Однако, выбор осей поворота в (65), осуществленный в процессе решения задачи, оказался отличным от выбора осей в (51). При принятии (51) система (53) в общем случае, видимо, не интегрируется. Однако, если в (51) принять

$$\mathbf{p} = \theta_0 / |\theta_0|, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) / |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|, \quad \varphi = -\psi, \quad \beta = 0, \quad \vartheta = \theta,$$

то система (53) сводится к уравнениям (62) и (63) при $\mathbf{b} = 0$ и интегрируется в квадратурах.

5 Равновесные положения тела на упругом основании при действии крутящего момента

Рассмотрим равновесные положения тела для некоторых типов внешнего момента.

5.1 Натуральная равновесная конфигурация

В этом случае $\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Уравнение (41) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \Rightarrow 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (66)$$

Согласно условию (39) имеем, что

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad (67)$$

Это одно из необходимых условий, гарантирующих выполнение неравенства (39). Тогда из (66) видим, что вектор $\boldsymbol{\theta}$ направлен по \mathbf{k} . Вместо (66) теперь можем записать

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0 \quad (68)$$

Дополнительно к условию (39) примем, что выполняется следующее ограничение на энергию

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = F(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad F(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} > 0 \quad (69)$$

При выполнении (67) и (69) уравнение (68) имеет единственное решение $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$, т.е. $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$.

Всюду в дальнейшем условия (39) и (69) будут предполагаться выполненными. Например, эти условия выполнены для энергии вида

$$\mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 C_1 \theta^2}{\alpha^2 - \theta^2 + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}{\beta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}, \quad (70)$$

где $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$, $C_1 > 0$, $C_3 > 0$ являются постоянными, причем, C_1 называется жесткостью на изгиб, а C_3 — жесткостью на кручение. При использовании (70) подразумевается, что начальные условия удовлетворяют неравенствам

$$\theta_0^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_0)^2 < \alpha^2, \quad (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_0)^2 < \beta^2$$

Тогда очевидно, что при всех t будут выполнены неравенства

$$\theta^2(t) \leq \alpha^2, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}(t) \leq \beta^2$$

Для реальных опор постоянные α^2 и β^2 относительно малы $\alpha^2 \sim 0.1$, $\beta^2 \sim 0.1$. Если параметры α^2 и β^2 устремить к бесконечности (мягкие опоры), то получим простейшую форму энергии

$$\mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2, \quad (71)$$

которая будет широко использоваться в дальнейшем.

5.2 Мертвый момент

Пусть на тело действует внешний момент

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = L \mathbf{k} \quad (72)$$

Уравнение (41) принимает вид

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{k} = L \mathbf{k} \quad (73)$$

С учетом представления (11) имеем

$$\mathbf{Z}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2} [(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}) \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{k}] \quad (74)$$

Умножая обе части (73) векторно на \mathbf{k} и учитывая (74) получаем

$$\left[2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} + \frac{1-g}{\theta^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} [\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}] = \mathbf{0} \quad (75)$$

Покажем, что должно выполняться равенство

$$\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} \quad (76)$$

Допустим, что это не так. Тогда из (75) следует два равенства

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} + \frac{1-g}{\theta^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0,$$

которые невозможны в силу (67). Следовательно, условие (76) должно быть выполнено. Подставляя (76) в (73), получаем

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = L \quad (77)$$

В силу неравенства (69) это уравнение имеет единственное решение. Если принять (71), то получим

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = L/C_3, \quad \boldsymbol{\theta} = L\mathbf{k}/C_3 \quad (78)$$

5.3 Касательный момент

Пусть внешний момент задан выражением

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = L\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (79)$$

т.е. этот момент стремится повернуть тело вокруг оси $\mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$.

Вместо уравнения (73) здесь имеем

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = L\mathbf{k}, \quad (80)$$

где использованы тождества $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z}^{-T} = \mathbf{Z}^{-1}$. Аналогично предыдущему показывается, что $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k}$. В результате приходим к (77) или, в частности, к (78).

5.4 Полукасательный момент

Полукасательным будем называть момент, предложенный Е.А.Николаи [3].

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = L(\mathbf{k} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) / \sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})} \quad (81)$$

Уравнение статики принимает вид

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} = L(\mathbf{k} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) \sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})} \quad (82)$$

В общем случае уравнение (82) имеет несчетное множество решений, но практический интерес среди них представляет только решение (76) – (78). Для энергии (70) это решение единственно.

Замечание. Моменты (72), (79) и (81) были введены в рассмотрение Е.А.Николаи [3]. Легко убедиться, что все они неконсервативны. Г.Циглер ввел в употребление консервативный полукасательный момент, но последний существенно отличается от момента (81) тем, что его модуль не остается постоянным.

Рассмотрим еще два типа внешних моментов, которые в отличие от уже рассмотренных являются консервативными.

5.5 Консервативный момент - 1

Сначала рассмотрим потенциал, который не является аналитическим. В приложениях случаи неаналитических потенциалов встречаются, хотя и относительно редко. Для данной работы потенциал такого рода представляет определенный интерес, поскольку внешний момент, порождаемый этим потенциалом и потому являющийся консервативным, ведет к так называемому парадоксу Николаи.

Пусть потенциал задан выражением

$$\Pi = -L \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} / |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}|, \quad L \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0 \quad (83)$$

Последнее неравенство исключает случай “чистого изгиба без кручения”, который нас не интересует. Далее рассматриваем случай $L > 0$, т.к. случай $L < 0$ по существу приводит к аналогичным результатам. В случае статики уравнение (44) дает ($\mathbf{M}_{\text{ex}} = \mathbf{0}$)

$$\frac{\partial(\Pi + U)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = L \boldsymbol{\theta} / \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (84)$$

Здесь сразу видим, что при выполнении неравенства $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$ вектор поворота направлен по \mathbf{k} и (84) принимает вид

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = L$$

С учетом (69) это уравнение имеет единственное решение. Если принять энергию (71) то решение дается формулами (78).

5.6 Консервативный момент - 2

Зададим внешний потенциал $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ в виде

$$\Pi = -L \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -L \mathbf{k} \quad (85)$$

Уравнение статики записывается в форме

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = L \mathbf{k} \quad (86)$$

Отсюда следует, что вектор поворота направлен по \mathbf{k} , т.е. имеем чистое кручение, а решение уравнения (86) единственно. Для энергии (71) оно дается формулами (78).

Итак, выше рассмотрены пять случаев задания внешних моментов. Всем им отвечает одно и то же положение равновесия: тело в упругой опоре закручено вокруг собственной оси. В положении равновесия все рассмотренные моменты неразличимы между собой. Понятно, что положение равновесия реализуется в действительности только тогда, когда оно устойчиво относительно малых возмущений. При наложении малых возмущений на положение равновесия приходится рассматривать уравнения динамики, а при движениях тела все рассмотренные выше моменты ведут себя по разному. Поэтому суждение об устойчивости одного и того же положения равновесия может быть получено только в результате анализа каждого случая в отдельности.

6 Устойчивость в линейном приближении. Уравнения в вариациях

Одним из наиболее употребительных методов исследования устойчивости является подход, основанный на наложении малых колебаний на равновесную конфигурацию, т.е. на анализе так называемых уравнений в вариациях. Известно [4], что такой подход не всегда приводит к правильным результатам, но, тем не менее, он широко используется в силу своей относительной простоты и хорошего соответствия здравому смыслу. Воспользуемся этим методом и в данном случае. Характеристики равновесного положения тела будем снабжать индексом "0": \mathbf{P}_0 , $\boldsymbol{\theta}_0$ и т.д. Введем в рассмотрение возмущенные вектор поворота $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ и тензор поворота \mathbf{P}_ε .

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{P}_\varepsilon = \exp[\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}], \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (87)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ есть первая вариация вектора $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$.

Выпишем возмущенные уравнения движения. Для определенности будем использовать уравнение (44).

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon} = \mathbf{P}_\varepsilon^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, \varepsilon} \quad (88)$$

Для равновесных состояний ($\boldsymbol{\Omega}_0 = 0$) имеем

$$\mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, 0} \quad (89)$$

Здесь и далее будут использоваться обозначения

$$\frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} \equiv \left. \frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}, \quad \frac{\partial^2(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0} \equiv \left. \frac{\partial^2(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$$

При получении уравнений в вариациях используем технику и обозначения п.2.3. Дифференцируя (88) по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{\zeta}}_0 + \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \frac{\partial^2(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0} \cdot \mathbf{Z}_0^{-\top} \cdot \boldsymbol{\zeta}_0 + (\mathbf{Z}^{-1})^* \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, 0} = -\boldsymbol{\zeta}_0 \times \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, 0} + \mathbf{P}_0^\top \cdot (\mathbf{M}_{\text{ex}})^* \quad (90)$$

Напомним, что $\mathbf{M}_{\text{ex}, 0}$ это только непотенциальная часть момента. Для первой вариации тензора-интегратора $\mathbf{Z}_\varepsilon^{-1}$ имеем представление

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}^{-1})^* &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} + \frac{1-g_0}{\theta_0^2} (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\varphi}) + \\ &+ \left[\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1-g}{\theta^2} \right) \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \left(\frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}_0 \end{aligned}$$

Кроме того, для дальнейшего необходима формула

$$\mathbf{Z}^{-\top} \cdot \mathbf{Z}^{-1} = \left(g^2 + \frac{1}{4} \theta^2 \right) \mathbf{E} + \left(\frac{1-g^2}{\theta^2} - \frac{1}{4} \right) \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}$$

Для энергии деформации примем простейшее выражение (71). Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \theta} = C_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) + C_3 \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_0 \partial \theta_0} = -\delta_4 C_3 (\mathbf{E} - \mathbf{k}), \quad (91)$$

где $\delta_4 = 1$ для консервативного момента (83) и $\delta_4 = 0$ во всех остальных случаях. Учтем также, что в положении равновесия имеем

$$\theta_0 = L\mathbf{k}/C_3, \quad \mathbf{M}_{\text{ex},0} = \delta_3 L\mathbf{k}, \quad (92)$$

где $\delta_3 = 1$ для моментов (72), (79) и (81); $\delta_3 = 0$ для консервативных моментов.

С учетом сказанного уравнение (90) заметно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \ddot{\zeta}_0 + [(C_1 - \delta_4 C_3) \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \mathbf{Z}_0^{-T} + ((1 + \delta_4) C_3 - C_4) \mathbf{k}\mathbf{k}] \cdot \zeta_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{M}_{\text{ex},0} + \\ + \frac{1 - g_0}{\theta_0^2} \theta_0 \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{M}_{\text{ex},0}) = -\zeta_0 \times \mathbf{M}_{\text{ex},0} + \mathbf{P}_0^T \cdot (\mathbf{M}_{\text{ex}})^* \end{aligned} \quad (93)$$

Примем дополнительно, что тензор инерции \mathbf{A} трансверсально изотропен, а для вариации ζ_0 и $\boldsymbol{\varphi}$ используем разложения

$$\zeta_0 = x\mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Z}_0^{-T} \cdot \zeta_0 = x\mathbf{k} + g_0 \mathbf{y} + \theta_0 2\mathbf{k} \times \mathbf{y} \quad (94)$$

В этом случае уравнение (93) эквивалентно двум уравнениям

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}^*, \quad (95)$$

$$\begin{aligned} A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[(C_1 - \delta_4 C_3) \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{\delta_3 L^2}{4C_3} + \delta_3 C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} - \frac{\delta_3 L}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{y} = \\ = (\mathbf{P}_0^T - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{M}_{\text{ex}})^* \end{aligned} \quad (96)$$

Последние два уравнения справедливы для всех рассмотренных в пункте 5 случаев, которые следует в дальнейшем изучать отдельно.

6.1 Устойчивость натурального состояния

В этом случае внешний момент отсутствует и $\theta_0 = \mathbf{0}$. Уравнения (95) – (96) сводятся к следующим

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{\mathbf{y}} + C_1 \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Колебательный характер решений этих уравнений очевиден, т.е. отсчетное положение тела есть устойчивое положение равновесия при отсутствии внешних моментов.

6.2 Мертвый момент

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 1, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = \mathbf{0}$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0,$$

$$A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{L^2}{4C_3} + C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} - \frac{L}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (97)$$

Решения второго из этих уравнений содержат экспоненциально растущую во времени составляющую. Поэтому положения равновесия твердого тела, повернутого вокруг своей оси в упругой опоре, неустойчиво при любом сколь угодно малом мертвом моменте. Это явление получило название парадокса Николаи [5], [6].

6.3 Касательный момент

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 1, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = L \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_0 = \mathbf{k}$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \\ A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{L^2}{4C_3} + C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} + \frac{L}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (98)$$

И в этом случае имеем неустойчивость при сколь угодно малом значении касательного внешнего момента L . Сравнивая уравнения (97) и (98) замечаем, что они различаются только знаком у гироскопического члена. Поэтому при сложении этих уравнений гироскопический член исчезает. Отсюда у Е.А.Николаи и возникла идея введения полукасательного момента.

6.4 Полукасательный момент

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 1, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = \frac{1}{2} L \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = 0$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{L^2}{4C_3} + C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (99)$$

Здесь анализ устойчивости сводится к отысканию наименьших по модулю значений L , которые нарушают неравенство

$$C_1 (g_0^2 + \theta_0^2/4) + C_3 g_0 (1 - g_0) > \frac{L^2}{4C_3} \quad (100)$$

Заметим, что при малых L имеем

$$g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)} \simeq 1 - \frac{1}{12} \frac{L^2}{C_3^2},$$

т.е. неравенство (100) выполнено и положение равновесия устойчиво. Структура уравнения (99) дала основание думать [5], что полукасательный момент Николаи консервативен.

6.5 Консервативный момент - 1

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 1, \quad \delta_3 = 0, \quad \mathbf{M}_{ex}^* = \mathbf{0}$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{y} + (C_1 - C_3) \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (101)$$

В этом случае при $C_1 - C_3 > 0$ имеем устойчивость, а при $C_1 - C_3 < 0$ имеем неустойчивость при любых значениях внешнего момента. Поскольку случай $C_1 - C_3 \leq 0$ вполне реален, например он имеет место для упругого основания в форме круглой тонкой пластины, то очевидно, что природа парадокса Николаи отнюдь не сводится к неконсервативному характеру внешнего момента, как это иногда утверждается в литературе.

6.6 Консервативный момент - 2

Для потенциала (85) имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 0, \quad \mathbf{M}_{ex}^* = \mathbf{0}$$

уравнения (95) – (96) сводятся к следующим

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{y} + C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (102)$$

Здесь положение равновесия устойчиво при всех значениях внешнего момента L .

7 Обсуждение результатов

В пп. 5–6 показано существование равновесного положения тела, повернутого вокруг собственной оси внешним моментом, характер которого может меняться. Сама по себе упругая опора обеспечивает устойчивое положение равновесия ненагруженного тела, и в этом смысле она не содержит в себе пороков. Если теперь повернуть тело вокруг собственной оси внешним моментом, величина которого мала, т.е. отношение модуля момента $|L|$ к величине жесткости на кручение $C_3 > 0$ много меньше единицы, то возникающее положение равновесия оказывается неустойчивым для некоторых типов внешних моментов, как неконсервативных, так и консервативных. С чисто теоретической точки зрения в этом нет ничего удивительного. Однако, с практической точки зрения ситуация кажется достаточно неприятной. В самом деле, при малом внешнем моменте можно ожидать, что задачу допустимо анализировать в линейном приближении. Именно так и поступают при анализе динамики ротора в упругих опорах в большинстве работ прикладного характера. Для малых поворотов имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E},$$

где для энергии принята аппроксимация (71). Тогда для касательного момента (79) уравнение (43) в линейном приближении дает

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Lk}, \quad t = 0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \quad (103)$$

Поскольку тензоры \mathbf{A} и \mathbf{C} симметричны и положительно определены, то решение задачи (103) имеет колебательный характер и не сулит нам никаких неожиданностей. Результаты предыдущего пункта показывают, что это не так. Если мы учтем малые второго порядка, а именно таков порядок слагаемого $\mathbf{Lk} \times \mathbf{y}$ в (98), то получим неустойчивые решения. И вообще, для очень многих типов внешних моментов получаются неустойчивые решения. Эксперименты, хотя и недостаточно чистые, показывают, что на самом деле эти неустойчивые решения никогда не проявляются. Как объяснить это явное противоречие между теорией и практикой? Известно несколько объяснений. Первое заключается во влиянии сил трения. Конечно, учет трения устраняет неустойчивость при малых значениях момента L . Однако, и здесь не все понятно. Прежде всего нет полной ясности в законах трения. В работе [7] ставилась задача выяснить дестабилизирующий характер касательного момента (79), который создавался парой реактивных сил. Предполагалось, что трение, каково бы оно ни было, будет влиять примерно одинаково на движение системы при наличии момента и при его отсутствии. В этом случае мы должны иметь следующее. Выведем систему из положения равновесия и предоставим ей совершать свободные колебания. Существующее в реальности трение приведет к затуханию свободных колебаний. Можно измерить время затухания τ_* . Теперь проводим второе испытание. Системе даем то же самое начальное отклонение, но в момент уничтожения сил, создающих начальное отклонение, включаем действие касательного момента. После этого измеряем время затухания возникающих колебаний. Результат: через время τ_{**} система приходит в положение равновесия (78). Исходя из результатов п. 6, следовало ожидать, что τ_{**} будет больше τ_* т.к. положение равновесия при действии касательного момента является неустойчивым, т.е. в систему идет накачка энергии. Измерения показали, что τ_{**} почти вдвое меньше, чем τ_* . Вывод: либо при наличии касательного момента, создаваемого реактивными струями, резко возрастает трение в системе, либо при анализе устойчивости не были учтены какие-то существенные свойства системы, например, инерционные свойства упругих опор. Второе объяснение, данное Е.А.Николаи [3] заключается в том, что необходимо учитывать нарушения в трансверсальной изотропии как в тензоре инерции \mathbf{A} , так и в тензоре упругости \mathbf{C} . Тогда, согласно Николаи, потери устойчивости при сколь угодно малом L не происходит, но при малых отклонениях от трансверсальной изотропии значения критических моментов неправдоподобно малы. Наконец, третье объяснение расхождения теории и эксперимента могло бы заключаться в том, что суждение об устойчивости на основе анализа уравнений в вариациях в задачах рассматриваемого типа оказывается неверным, что теоретически вполне возможно [4]. Однако, как будет показано в следующем пункте, нелинейный анализ подтверждает факт неустойчивости.

8 Нелинейный анализ движения твердого тела на упругой опоре при действии внешнего момента

Пусть на тело на упругой трансверсально изотропной опоре действует комбинация моментов (72) и (69)

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = \gamma L(l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}), \quad \gamma = (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})^{-\frac{1}{2}}, \quad (104)$$

где при $l_1 = 1, l_2 = 0$ имеем мертвый момент; при $l_1 = 0, l_2 = 1$ имеем касательный момент при $l_1 = l_2 = 1$ имеем полукасательный момент.

Тензор инерции тела и энергию деформации опоры считаем трансверсально изотропными

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{P} \cdot [\mathbf{A}_1 \mathbf{E} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) \mathbf{k} \mathbf{k}] \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{A}_1 \mathbf{E} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) \mathbf{k}' \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k};$$

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}(x, \boldsymbol{\theta}^2) \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}(x, \boldsymbol{\theta}^2) \mathbf{k}, \quad x \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Для вектора кинетического момента имеем формулы (35) и (36). Выпишем уравнение баланса энергии для внешнего момента (36).

$$\dot{\varepsilon} = \gamma L(l_1 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} + l_2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}), \quad \varepsilon = \frac{1}{2} A_1 \omega^2 + \frac{1}{2} (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 + U(\boldsymbol{\theta}) \quad (105)$$

Отсюда получаем, что

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = L \int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{k} \cdot (l_1 \boldsymbol{\omega}(\tau) + l_2 \boldsymbol{\Omega}(\tau)) d\tau \quad (106)$$

Если интеграл в левой части (106) ограничен при всех t , то при малых $|L|$ энергия ε мало отличается от ε_0 , и можно говорить об устойчивости. Если интеграл в правой части (106) неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, то имеет место накачка энергии в систему, что влечет за собой неустойчивость при любом сколь угодно малом $|L|$. Г.Циглер указывает [6], с.159-160, что при $l_1 = 1, l_2 = 0$ происходит накачка энергии, но он не приводит строгого доказательства, которое совсем не очевидно. Во всяком случае, автору не удалось получить это доказательство аналитически. Численные расчеты, проведенные с помощью Т.П.Товстик, показали, что при $l_1 = 1, l_2 = 0$ или $l_1 = 0, l_2 = 1$ энергия неограниченно растет, а при $l_1 = l_2 = 1$ энергия колеблется около значения ε_0 . Однако, анализировалось малое число различных вариантов начальных условий, поэтому сказанное носит предварительный характер. Для получения более определенных результатов будем рассуждать несколько иначе. Выпишем уравнения движения.

$$[\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}'] + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} = \gamma L (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}') \quad (107)$$

Здесь использованы левые угловые скорости. Через правую угловую скорость уравнение (107) переписывается в виде

$$[\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}] + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = \gamma L (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k}) \quad (108)$$

где $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}' = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$.

Вычитая (108) из (107) получаем

$$\begin{aligned} [A_1(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) + (A_3 - A_1)(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k}' - \mathbf{k})] + (A_3 - A_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = \\ = \gamma L[(l_1 - l_2)\mathbf{k} + l_2\mathbf{k}' - l_1\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k}] \end{aligned} \quad (109)$$

Проецируя (109) на орт \mathbf{k} , получаем

$$[A_1(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{k} + (A_1 - A_3)\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}(1 - \cos \vartheta)] = \gamma L(l_1 - l_2)(1 - \cos \vartheta), \quad (110)$$

где $\cos \vartheta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$.

Преобразуем (110) к другому виду. Согласно (8) и (10) имеем

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = 2 \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (111)$$

Представим $\boldsymbol{\theta}$ в виде разложения

$$\boldsymbol{\theta} = x\mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{y} = y(t)\mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (112)$$

где $\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\theta^2 = x^2 + y^2$.

Легко получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}} = \dot{\psi} y^2 \mathbf{k}, \\ \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) &= 2(1 - \cos \theta) \frac{y^2}{\theta^2} \dot{\psi}, \quad (1 - \cos \vartheta) = (1 - \cos \theta) \frac{y^2}{\theta^2} \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений равенство (110) можно переписать в виде¹

$$[(1 - \cos \vartheta)F] = \gamma L(l_1 - l_2)(1 - \cos \vartheta), \quad (113)$$

где

$$F = 2A_1\dot{\psi} + (A_1 - A_3)\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$$

Заметим, что правая часть (113) знакопостоянна, причем ее знак определяется числом $L(l_1 - l_2) = \text{const}$. Пусть правая часть (113) положительна. выберем начальные условия так, что бы функция F при $t = 0$ была положительной. Тогда произведение $(1 - \cos \vartheta)F$ будет расти до тех пор пока правая часть (113) не обратится в нуль, что возможно только тогда, когда $(1 - \cos \vartheta) = 0$. Однако, в этом случае функция F должна обратиться в бесконечность. Если же правая часть (113) не обращается в нуль, то функция F должна тем более возрасть до бесконечности. Если левая часть (113) отрицательна, то начальные условия выбираем так, чтобы F при $t = 0$ была отрицательной, т.е. все рассуждения повторяем, умножив обе части (113) на (-1) . Сказанное означает, что при $l_1 \neq l_2$ тело, в конечном счете, начинает бесконечно быстро прецессировать вокруг вертикального орта \mathbf{k} , и никакое сколь угодно жесткое трансверсально изотропное упругое основание не может воспрепятствовать этому. Указанное обстоятельство, разумеется, объясняет формальные истоки парадокса

¹Равенство (113) было получено другим способом и показывалось автору в частной беседе А.М.Кривцовым.

Е.А.Николаи, но оно отнюдь не устраняет его. Действительно, любой парадокс заключается в противоречии между формально верным утверждением и интуицией или здравым смыслом. В частности, приведенное выше рассуждение вовсе не объясняет ненаблюдаемости бесконечного возрастания скорости прецессии в экспериментах. Как отмечено в предыдущем пункте, учет трения также не вполне объясняет отмеченную ненаблюдаемость потери устойчивости при сколь угодно малом внешнем моменте. Возможное объяснение парадокса Николаи может заключаться в следующем. При возрастании скорости прецессии тела до достаточно больших значений упругое основание заведомо нельзя считать безынерционным. Кроме того, никто и никогда не доказал, что упругий момент (или упругая сила) непременно должны быть позиционными. Возможно, что на самом деле упругий момент должен иметь вид (18). Хотя слагаемое, содержащее скорость, в (18) и не попадает в выражение баланса энергии, но оно определенно влияет на угловые скорости и, следовательно, на правую часть (105) или (106). Поэтому, по мнению автора, вопрос о парадоксе Е.А.Николаи нельзя считать полностью решенным: нужны и тщательные эксперименты, и дальнейшие теоретические разработки.

Список литературы

- [1] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**, pp.187-204.
- [2] Жилин П.А. Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней // Механика и процессы управления. Тр. СПбГТУ, N458, С.-Пб.: 1995, с. 56-73.
- [3] Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.
- [4] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
- [5] Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
- [6] Циглер Г. Основы теории упругой устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
- [7] Жилин П.А., Сергеев А.Д. Экспериментальное исследование устойчивости консольного стержня при кручении // Механика и процессы управления. Тр. СПбГТУ, N446, С.-Пб.: 1993, с. 174.

Нелинейная теория стержней и ее приложения*

Аннотация

Доклад посвящен обсуждению динамической теории тонких пространственно изогнутых и естественно закрученных стержней. Предлагаемая теория включает в себя все известные варианты теории стержней, но обладает более широкой областью применимости. Для плоских упругих кривых определены все модули упругости. Значительное внимание в докладе уделено анализу ряда классических задач, включая те из них, решение которых ведет к парадоксальным результатам. В частности, подробно рассмотрена знаменитая эластика Эйлера и показано, что наряду с известными равновесными конфигурациями в ней существуют и динамические равновесные конфигурации. При этом форма упругой линии не меняется, а изогнутый стержень совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси. Энергия деформации при этом не меняется. Подчеркнем, что речь не идет о движениях стержня как жесткого целого, поскольку заделанный торец стержня остается неподвижным. Отсюда следует, что изогнутая равновесная конфигурация в эластике Эйлера является, вопреки общепринятой точке зрения, неустойчивой. С другой стороны, этот вывод не подтверждается экспериментальными данными. Поэтому возникает парадоксальная ситуация, которая требует своего решения. Аналогичная ситуация, известная под названием парадокса Николаи, возникает при кручении стержня торцевым моментом. В этом случае эксперимент показывает, что крутящий момент, оказывает стабилизирующее действие, что находится в резком противоречии с теорией.

1 Введение

Основы теории тонких упругих стержней были заложены Л. Эйлером. Будучи старейшей теорией в механике сплошных сред, теория тонких стержней остается одной из самых полезных и в теоретическом, и в практическом отношениях. Линейная теория стержней составляет отдельный предмет, который изучается во всех технических вузах и обрел, можно сказать, каноническую форму. Не столь благополучно обстоит дело с нелинейной теорией стержней. С одной стороны, в ней получено огромное число частных результатов. С другой стороны, большая их часть, полученная с 1744

*Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Труды XXIV летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1997. С. 313–337.

по 1916 годы, в настоящее время трудна для восприятия, т.к. изложена на уже устаревшем языке и разбросана по труднодоступным изданиям. Отсутствие современной монографии по нелинейной теории стержней, с достаточной полнотой освещающей предмет, является весьма заметным пробелом в механике сплошных сред и сильно затрудняет дальнейший прогресс в этой области. Между тем, многие аспекты обсуждаемой теории еще не исследованы. Особенно это относится к пространственным формам движения и равновесия упругих стержней.

Целью данной работы является последовательное изложение нелинейной теории тонких упругих стержней. Дается компактная форма основных уравнений, удобных для математического исследования, и показываются некоторые примеры их применения. Особенностью излагаемой теории стержней является систематическое использование тензора поворота, позволяющего наиболее естественным образом описать повороты поперечных сечений стержня. Кроме того, тензор поворота оказывается удобным при рассмотрении задач совместной динамики стержня и сопряженного с ним твердого тела. Заметим, что общепринятой нелинейной теории стержней не существует. Изложенной в работе теорией авторы пользуются уже более десяти лет и имели возможность убедиться в ее достоинствах. Первоначальный интерес авторов к уточненной теории был связан со следующим обстоятельством. Известно, что решения целого ряда задач динамики стержней приводят к парадоксальным или не вполне ясным результатам, сущность которых хотелось бы осознать полнее. Приведем простой пример. Рассмотрим динамическую задачу для консольного стержня, нагруженного торцевым мертвым моментом. Если модуль мертвого момента мал, и малы начальные отклонения, то можно, казалось бы, воспользоваться уравнениями малых колебаний скрученного стержня. Поступив таким образом, мы получим хорошо поставленную задачу, решения которой малы по норме и не предвещают никаких неприятностей. Но стоит учесть в этой задаче нелинейные члены, как для сколь угодно малой величины крутящего момента и для сколь угодно малых начальных условий мы получим экспоненциально растущие во времени решения. Это явление получило название парадокса Николаи. Аналогичное явление имеет место и для многих других типов торцевых моментов. Означает ли это обстоятельство невозможность использования линеаризованных уравнений? Очень не хотелось бы так думать. А это означает необходимость поиска строгих критериев того, когда можно использовать линейный подход, а когда нельзя, и почему. Для анализа подобного рода необходимо располагать строгой внутренне непротиворечивой теорией стержней. Между тем в литературе подобные задачи решаются на основе заведомо приближенных уравнений, и остается неясным, какие факторы и за что отвечают.

2 Основные уравнения нелинейной динамики упругих стержней

Нелинейная теория стержней, не учитывающая деформацию поперечного сдвига была построена Г. Кирхгофом и усовершенствована А. Клебшем. Эта теория представлена в книге А. Лява [1]. Ниже воспроизводятся основные уравнения нелинейной динамики упругих стержней [2], вывод которых опирается на идеи работ [3, 4]. Отличие этих уравнений от классических заключается в учете деформации поперечного сдвига и

инерции вращения. Кроме того используется современная тензорная символика. При игнорировании поперечного сдвига и инерции вращения излагаемая теория переходит в классическую.

В отсчетной конфигурации упругая линия стержня определяется заданием вектора $\mathbf{r}(s) = s\boldsymbol{\tau}$, $0 \leq s \leq l$, где $\boldsymbol{\tau}$ — орт недеформированной оси стержня, s — материальная координата в недеформированном состоянии, l — длина недеформированного стержня. В актуальной конфигурации положение точек стержня определяется вектором $\mathbf{R}(s, t)$, где t — время. Ориентация поперечного сечения стержня в точке s и момент времени t определяется заданием тензора поворота $\mathbf{P}(s, t)$

$$\mathbf{P}(s, t) \cdot \mathbf{P}^T(s, t) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(s, t) = 1.$$

В отсчетной конфигурации $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, а в начальный момент времени $\mathbf{P}(s, 0) = \mathbf{P}_0(s)$. Для первоначально прямолинейных стержней уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{N}'(s, t) + \rho \mathbf{F}(s, t) = \rho \ddot{\mathbf{R}}(s, t), \quad (\dot{f} \equiv \partial f / \partial t, \quad f' \equiv \partial f / \partial s) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M}'(s, t) + \mathbf{R}'(s, t) \times \mathbf{N}(s, t) + \rho \mathbf{L}(s, t) = \rho (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega})', \quad (2.2)$$

где \mathbf{N} и \mathbf{M} — векторы внутренних усилий и моментов; \mathbf{F} и \mathbf{L} — векторы массовых плотностей внешних сил и моментов; ρ — массовая плотность в отсчетной конфигурации; $\rho \boldsymbol{\Theta}$ — линейная плотность тензора инерции стержня. В (2.1)–(2.2) считается, что упругая линия проходит через центры масс поперечных сечений.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ поворота поперечных сечений стержня находится по уравнению Пуассона [5, 6]

$$\dot{\mathbf{P}}(s, t) = \boldsymbol{\omega}(s, t) \times \mathbf{P}(s, t) \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T]_{\times}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение векторы деформации: \mathbf{E} — вектор деформации растяжения–поперечного сдвига, $\boldsymbol{\Phi}$ — вектор деформации изгиба–кручения. Они определяются формулами

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\Phi}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \quad (2.4)$$

Если векторы \mathbf{E} и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю, то стержень движется как жесткое целое. Наоборот, если стержень испытывает только смещение как жесткое целое, то \mathbf{E} и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю. Векторы деформации удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}', \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\omega}', \quad (\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}). \quad (2.5)$$

Для замыкания системы уравнений (2.1)–(2.5) необходимо задать определяющие уравнения, т.е. связь векторов усилий и моментов с векторами деформации. При этом необходимо иметь уверенность, что определяющие уравнения согласованы с уравнением баланса энергии.

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \rho (\mathcal{K} + \mathcal{U}) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) ds + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}) \Big|_{s_1}^{s_2}, \quad (2.6)$$

где \mathcal{K} и \mathcal{U} — массовые плотности кинетической и внутренней энергий соответственно. Для \mathcal{K} имеем

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где

$$\Theta = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}, \quad \Theta = \Theta_1 (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}) + \Theta_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}, \quad (2.7)$$

\mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 — главные оси инерции поперечного сечения. Второе из выражений (2.7) является частным случаем первого, когда $\Theta_1 = \Theta_2$. Так будет для стержней с круговым поперечным сечением или если последнее имеет форму правильного многоугольника.

В уравнении (2.6) не учтены термомеханические эффекты.

После стандартных преобразований, учитывающих (2.1)–(2.2) и (2.5), получаем локальную форму уравнения баланса энергии

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N} \cdot (\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) + \mathbf{M} \cdot (\dot{\Phi} - \boldsymbol{\omega} \times \Phi). \quad (2.8)$$

Примем, что внутренняя энергия зависит только от векторов деформации \mathbf{E} , Φ и тензора поворота \mathbf{P} , т.е.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{E}, \Phi, \mathbf{P}).$$

Понятно, что внутренняя энергия не должна меняться при наложении на данную конфигурацию жесткого смещения или жесткого поворота. Рассмотрим однопараметрическое семейство тензоров поворота $\mathbf{Q}(\alpha)$, не зависящих ни от s , ни от t . Наряду с конфигурацией $\mathbf{R}(s, t)$ и $\mathbf{P}(s, t)$ рассмотрим конфигурацию $\mathbf{R}_*(s, t)$ и $\mathbf{P}_*(s, t)$, определенную выражением

$$\mathbf{R}_*(s, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{Q}(\alpha) \cdot [\mathbf{R}(s, t) - \mathbf{R}(0, t)], \quad \mathbf{P}_*(s, t) = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P}(s, t).$$

Согласно (2.4) для векторов деформации имеем

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{R}'_* - \mathbf{P}_* \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{E}(s, t),$$

$$\Phi_* = -\frac{1}{2} [\mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{P}_*^T]_{\chi} = -\frac{1}{2} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Q}^T]_{\chi} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \Phi(s, t).$$

Инвариантность внутренней энергии относительно жестких смещений означает

$$\mathcal{U}(\mathbf{E}_*, \Phi_*, \mathbf{P}_*) = \mathcal{U}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{Q} \cdot \Phi, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}) = \mathcal{U}(\mathbf{E}, \Phi, \mathbf{P}). \quad (2.9)$$

Для тензора $\mathbf{Q}(\alpha)$ примем

$$\frac{d}{d\alpha} \mathbf{Q}(\alpha) = \boldsymbol{\eta}(\alpha) \times \mathbf{Q}(\alpha), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\zeta}.$$

Дифференцируя (2.9) по α и полагая затем $\alpha = 0$, получаем тождество

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{E}} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi} \times \Phi \right) \cdot \boldsymbol{\zeta} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{P}) = 0. \quad (2.10)$$

Это равенство должно выполняться для любых векторов ζ . Теперь мы в состоянии вычислить производную от внутренней энергии по времени, входящую в левую часть (2.8)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{dU}{d\Phi} \cdot \dot{\Phi} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}).$$

Используя тождество (2.10) при $\zeta = \boldsymbol{\omega}$ и исключая из последнего равенства последнее слагаемое, получаем

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \cdot (\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) + \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot (\dot{\Phi} - \boldsymbol{\omega} \times \Phi).$$

С учетом последнего равенства локальное уравнение баланса энергии принимает вид

$$\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{N} \right) \cdot (\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) + \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \Phi} - \mathbf{M} \right) \cdot (\dot{\Phi} - \boldsymbol{\omega} \times \Phi) = 0.$$

Это уравнение должно выполняться для произвольных значений векторов $\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$ и $\dot{\Phi} - \boldsymbol{\omega} \times \Phi$, что возможно тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Коши–Грина

$$\mathbf{N} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \rho \frac{\partial U}{\partial \Phi}, \quad (2.11)$$

где, напомним, ρ — массовая плотность в отсчетной конфигурации. Таким образом, чтобы получить замкнутую теорию упругих стержней, необходимо задать функцию $U(\mathbf{E}, \Phi, \mathbf{P})$, удовлетворяющую уравнению (2.10), которое удобнее переписать в другой форме, если учесть тождество

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot (\zeta \times \mathbf{P}) = - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_x \cdot \zeta.$$

Тогда вместо (2.10) с учетом произвольности вектора ζ получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \times \mathbf{E} + \frac{\partial U}{\partial \Phi} \times \Phi + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_x = \mathbf{0}.$$

Это уравнение в частных производных первого порядка, общим интегралом которого является произвольная функция $U(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E}, \mathbf{P}^T \cdot \Phi)$. Простейшая форма для U имеет вид квадратичной формы

$$\rho U = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi, \quad (2.12)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{C} симметричные положительно определенные тензоры 2-го ранга, заданные в отсчетной конфигурации и не зависящие от деформаций стержня, т.е. они могут быть вычислены по данным линейной теории. Плотность энергии (2.12) переходит в классическую [1, с.417] при игнорировании деформации поперечного сдвига. Однако энергия (2.12) применима только для достаточно малых деформаций. Например, она не способна описать эффект Пойнтинга — укорочение стержня при закручивании. Тензоры упругости \mathbf{A} и \mathbf{C} в общем случае имеют вид

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

где A_3 — жесткость на растяжение; A_1 и A_2 — жесткости на поперечный сдвиг; C_3 — жесткость на кручение; C_1 и C_2 — жесткости на изгиб. В дальнейшем будет рассматриваться случай трансверсально-изотропных тензоров упругости $A_1 = A_2$ и $C_1 = C_2$

$$\mathbf{A} = A_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + A_1 (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{C} = C_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + C_1 (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}). \quad (2.13)$$

Подставляя (2.12) в (2.11), получаем

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}. \quad (2.14)$$

Переход к теории без учета деформации поперечного сдвига происходит в пределе $A_1 \rightarrow \infty$, $A_2 \rightarrow \infty$. Вектор усилия при этом должен оставаться конечным. Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \mathbf{a} : \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = (1 + e) \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = e \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.15)$$

где $e = dS/ds - 1$ — относительное удлинение упругой линии. В этом случае вместо первого из соотношений (2.14) мы должны принять равенство

$$\mathbf{N} = A_3 e \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (2.16)$$

где вектор перерезывающих сил \mathbf{Q} находится из уравнений движения. При этом энергия (2.12) принимает вид

$$\rho U = \frac{1}{2} A_3 e^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad e = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} - 1. \quad (2.17)$$

Весьма популярна теория, не учитывающая не только деформацию поперечного сдвига, но и растяжение. В этом случае имеем

$$e = 0, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \rho U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}. \quad (2.18)$$

Вектор усилий \mathbf{N} находится из уравнений движения.

К выписанным уравнениям следует добавить краевые условия. Здесь нужно ставить по шесть краевых условий на каждом торце стержня. Например, для защемленного края имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

Для свободного торца имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Возможны и многие другие типы краевых условий.

В некоторых случаях классическое приближение для энергии деформации (2.12) может оказаться недостаточным, и нужно учитывать более высокие степени векторов деформации. С точностью до членов 3-го порядка энергию деформации можно записать в виде

$$\rho U = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_2 \cdot \mathbf{E}) + \boldsymbol{\Phi} \cdot (\mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_1 \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_3 \cdot \boldsymbol{\Phi}).$$

Для первоначально прямолинейных стержней легко доказать, что $\tilde{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{0}$ и $\tilde{\mathbf{D}}_3 = \mathbf{0}$. Кроме того, поскольку вектор деформации обычно мал, то учет слагаемых третьего порядка по \mathbf{E} кажется излишним, т.е. можно принять $\tilde{\mathbf{D}}_2 = \mathbf{0}$. Таким образом, следующее за (2.12) приближение для энергии можно принять в виде [2]

$$\rho U = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi + \Phi \cdot (\mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) \cdot \Phi, \quad (2.19)$$

где тензор третьего ранга $\tilde{\mathbf{D}}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{D}} = \otimes_1^3 \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}, \quad (2.20)$$

где введено обозначение

$$\otimes_1^k \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \equiv \otimes_1^k \mathbf{P} \cdot (S^{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k}) \equiv S^{i_1 \dots i_k} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{i_k}).$$

Общий вид трансверсально-изотропного тензора третьего ранга дается формулой

$$\mathbf{D} = D_1 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + D_2 \boldsymbol{\tau} \otimes (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}) + D_3 [\mathbf{d}_1 \otimes \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{d}_2 + (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}) \otimes \boldsymbol{\tau}], \quad (2.21)$$

где $|\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_2| = 1$, $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0$, $\mathbf{d}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{d}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, $(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$.

Модуль D_1 легко определяется из экспериментов по кручению и равен $D_1 = C_3$ — см. [2]. Таким образом, следующее приближение для энергии деформации можно записать в виде

$$\rho U = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi + 2D_3 (\mathbf{E} \cdot \Phi) \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} [D_2 \Phi \cdot \Phi + (C_3 - D_2 - 2D_3) (\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau})^2]. \quad (2.22)$$

Анализ теории стержней с энергией (2.22) до сих пор не проводился. Соотношения упругости для сил и моментов при принятии (2.22) записываются в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E} + [D_2 \Phi \cdot \Phi + (C_3 - D_2 - 2D_3) (\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau})^2] \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} + 2D_3 (\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \Phi, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi + 2D_2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}) \Phi + \\ &+ [2D_3 \mathbf{E} \cdot \Phi + 2(C_3 - D_2 - 2D_3) (\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau})] \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} + 2D_3 (\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Эти выражения радикально упрощаются при принятии допущения $D_2 = D_3 = 0$, но не вполне ясно насколько это корректно.

3 Равновесие консольного стержня, нагруженного мертвым моментом

В качестве простой иллюстрации рассмотрим одну из немногих задач, допускающих точное элементарное решение по нелинейной теории. Примем, что в (2.1)–(2.2) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Краевые условия имеют вид

$$s = 0: \quad \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l: \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{L} = \text{const}$ и не зависит от деформации.

Уравнения статики (2.1)–(2.2), соотношения (2.14) и условия (3.1) дают

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (3.2)$$

Второе из соотношений (2.14) запишем в обращенной форме

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L}. \quad (3.3)$$

Легко строится первый интеграл уравнения (3.3)

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L} = \text{const}. \quad (3.4)$$

Чтобы убедиться, что это действительно первый интеграл (3.3), достаточно продифференцировать h по координате, воспользоваться уравнением Пуассона (2.4) и самим уравнением (3.3)

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\Phi} \times \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L}}_{\boldsymbol{\Phi}}) - \frac{1}{2} (\underbrace{\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T}_{\boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{L} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Phi}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{L} = 0. \end{aligned}$$

Тензор поворота \mathbf{P} в общем случае определяется тремя параметрами, например, углами Эйлера. Интеграл (3.4) показывает, что только два из трех параметров являются независимыми. Поэтому достаточно указать двухпараметрический тензор \mathbf{P} , тождественно удовлетворяющий интегралу энергии (3.4). Для тензора \mathbf{C} общего вида тензор \mathbf{P} строится относительно сложно [6]. Но для трансверсально изотропного тензора \mathbf{C} вида (2.13) тензор \mathbf{P} определяется немедленно и имеет вид

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(\psi(s)\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(s)\boldsymbol{\tau}), \quad \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|, \quad (3.5)$$

где используется стандартное для данной работы обозначение

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \equiv (1 - \cos \alpha) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad |\mathbf{m}| = 1 \quad (3.6)$$

для тензора поворота на угол α вокруг вектора \mathbf{m} .

Тензор (3.5) тождественно удовлетворяет (3.4) при любых значениях углов $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ в силу равенств

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{Q}(\varphi\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.7)$$

где \mathbf{C} определен равенством (2.13).

Вектор изгиба–кручения $\boldsymbol{\Phi}$, отвечающий тензору поворота (3.5) — см. [2, 6] выражается формулой

$$\boldsymbol{\Phi} = \psi' \hat{\mathbf{L}} + \varphi' \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (3.8)$$

Теперь уравнение (3.3) с учетом (3.5) и (3.7) принимает вид

$$\psi' \hat{\mathbf{L}} + \varphi' \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

или после умножения на $\mathbf{Q}^T(\psi\hat{\mathbf{L}})$ слева имеем

$$\psi'\hat{\mathbf{L}} + \varphi'\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L}.$$

В скалярной форме это уравнение равносильно двум

$$\psi' + \varphi' \cos \theta = 2h/L, \quad \psi' \cos \theta + \varphi' = \frac{L \cos \theta}{C_3}, \quad (3.9)$$

где $L \equiv |\mathbf{L}|$, $\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\tau} = \cos \theta$, $2h = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{C_3} L^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{C_1} L^2 \sin^2 \theta$,
 θ — угол между направлением \mathbf{L} и $\boldsymbol{\tau}$.

Решая (3.9), находим углы ψ и φ

$$\psi' = \frac{L}{C_1}, \quad \varphi' = \left(\frac{L}{C_3} - \frac{L}{C_1} \right) \cos \theta. \quad (3.10)$$

Вектор $\mathbf{R}(s)$ находится по (3.2) и (3.10)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}(\beta s \hat{\mathbf{L}}) \cdot \boldsymbol{\tau} = (1 - \cos \beta s) \cos \theta \hat{\mathbf{L}} + \cos \beta s \boldsymbol{\tau} + \sin \beta s \hat{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \beta = L/C_1$$

или после интегрирования

$$\beta \mathbf{R} = (\beta s - \sin \beta s) \cos \theta \hat{\mathbf{L}} + \sin \beta s \boldsymbol{\tau} + (1 - \cos \beta s) \hat{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau}. \quad (3.11)$$

легко видеть, что (3.11) определяет винтовую линию, т.е. линию, навитую на цилиндр радиуса $R_c = 1/\beta$, ось которого направлена вдоль вектора $\hat{\mathbf{L}}$. Радиусы кривизны и кручения, а также шаг H винтовой линии, определяются формулами

$$R_1^{-1} = \beta \sin \theta, \quad R_2^{-1} = \beta \cos \theta, \quad H = 2\pi \cos \theta / \beta. \quad (3.12)$$

Если вектор $\hat{\mathbf{L}}$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}$, то винтовая линия превращается в дугу окружности. Если, кроме того, параметр $\beta l = 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$, то стержень сворачивается в k -витковую окружность. Обратим внимание, что следует различать понятия кручения стержня и кручения упругой линии. Радиус кручения упругой линии дается второй из формул (3.12). В то время как кручение стержня находится по вектору изгиба-кручения следующим образом (у Лява [1] оно определено без учета деформации поперечного сдвига). Вектор $\boldsymbol{\tau}$ есть нормаль к поперечному сечению недеформированного стержня. Вектор $\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$ есть нормаль к поперечному сечению деформированного стержня. Имеем представления

$$\mathbf{D}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{D} \Rightarrow \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{D} + \mathbf{D} \times \mathbf{D}'.$$

Величина $\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{D}$ называется кручением стержня, а обратная к ней величина — радиусом кручения. В данной задаче $\mathbf{D} = \mathbf{R}'$. Поэтому в данной задаче имеем

$$R_k^{-1} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}' = [\psi'\hat{\mathbf{L}} + \varphi'\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T(\psi\hat{\mathbf{L}})] \cdot \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathbf{L}}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \psi' \cos \theta + \varphi'.$$

Итак, радиус кручения стержня R_k определяется формулой

$$R_k^{-1} = \frac{L \cos \theta}{C_3} \neq R_2^{-1} = \frac{L}{C_1} \cos \theta.$$

Допустим, что внешний торцевой момент \mathbf{L} мал по величине

$$\left| \frac{Ll}{C_3} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{Ll}{C_1} \right| \ll 1.$$

В этом случае в полном решении можно ограничиться только главными членами разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= s\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \beta s^2 \dot{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{6} \beta^2 s^3 \cos \theta \boldsymbol{\tau} \times (\dot{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau}), \\ \Phi(s) &= \frac{L}{C_1} \dot{\mathbf{L}} + \left(\frac{L}{C_3} - \frac{L}{C_1} \right) \cos \theta \boldsymbol{\tau} + \frac{Ls}{C_1} \left(\frac{L}{C_3} - \frac{L}{C_1} \right) \cos \theta \dot{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

Линейные по L/C_1 и L/C_3 слагаемые в этих выражениях даются линейной теорией, а квадратичные по ним слагаемые малы, но не вполне ясно, когда их можно игнорировать, т.к. они ортогональны линейным слагаемым и качественно меняют характер решения — плоская кривая превращается в пространственную.

4 Условия потенциальности внешних воздействий

Чтобы не загромождать изложение несущественными деталями, в дальнейшем считаем, что один конец стержня зашпелен: $\mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}(0, t) = \mathbf{E}$. Тогда мощность внешних воздействий на стержень определяется выражением

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) ds + \mathbf{N}(l, t) \cdot \mathbf{v}(l, t) + \mathbf{M}(l, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(l, t). \quad (4.1)$$

Определение: внешние воздействия называются потенциальными, если существуют такие функции векторов положений и тензоров поворота $\Pi_1(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ и $\Pi_2(\mathbf{R}, \mathbf{P})$, что справедливы равенства

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{d}{dt} \Pi_1(\mathbf{R}, \mathbf{P}), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{N}(l, t) \cdot \mathbf{v}(l, t) + \mathbf{M}(l, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(l, t) = -\frac{d}{dt} \Pi_2(\mathbf{R}(l, t), \mathbf{P}(l, t)),$$

где векторы усилия $\mathbf{N}(l, t)$ и момента $\mathbf{M}(l, t)$ считаются заданными функциями $\mathbf{R}(l, t)$ и $\mathbf{P}(l, t)$. Поскольку условия потенциальности для обоих случаев в (4.2) выписываются одинаково, то в дальнейшем будем рассматривать только первое из этих выражений, причем будем писать $\Pi_1 = \Pi$. Вычислим производную по времени от функции $\Pi(\mathbf{R}, \mathbf{P})$

$$\dot{\Pi}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{P}}.$$

Кроме того, с учетом (2.3) имеем

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot [\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T]_{\times} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \mathbf{P})^T \cdot \dot{\mathbf{P}}.$$

Подставляя эти выражения в (4.2), получаем

$$\left(\mathbf{F} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}\right) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left[\frac{1}{2} \mathbf{L} \times \mathbf{P} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}}\right] \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (4.3)$$

Получили линейную форму скоростей, которая для всех мыслимых движений должна обращаться в нуль. Конечно, отсюда нельзя заключить, что коэффициенты при скоростях должны обращаться в нуль, поскольку не все скорости здесь независимы. В самом деле, из уравнения Пуассона следует

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \Rightarrow \operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^T \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0 \quad \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Поэтому (4.3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}, \quad \frac{1}{2} \mathbf{L} \times \mathbf{P} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Умножая второе из этих равенств на \mathbf{P}^T справа и вычисляя векторный инвариант от обеих частей получившегося равенства, получаем искомые условия потенциальности

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}, \quad \mathbf{L} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T\right)_X. \quad (4.4)$$

Здесь учтены тождества

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})_X = -2\mathbf{a}, \quad \mathbf{A}_X = \mathbf{0} \quad \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Условие потенциальности силы вполне стандартно, но условие потенциальности момента, видимо, ранее не встречалось. Задание Π , как функции \mathbf{R} и \mathbf{P} , возможно, но не всегда удобно. Часто бывает удобнее пользоваться вектором поворота [6]. Напомним его определение. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота представим в форме

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$ — неподвижный вектор тензора \mathbf{P} , θ — угол поворота. Тензору поворота (4.5) отвечает угловая скорость [5, 6]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (4.6)$$

Вектором поворота называется вектор $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}, \quad \mathbf{P} = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}).$$

Вторая из этих формул, являющаяся перефразировкой теоремы Эйлера (4.5), устанавливает связь между тензором поворота и вектором поворота. Через вектор поворота угловая скорость выражается формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.7)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \left[\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Потенциалы Π_1 и Π_2 в (4.2) можно рассматривать как функции \mathbf{R} и $\boldsymbol{\theta}$. Тогда вместо (4.3) получим

$$\left(\mathbf{F} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}} \right) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left[\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = 0.$$

Здесь уже все скорости линейно независимы и условия потенциальности состоят в обращении коэффициентов при скоростях в нули

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}, \quad \mathbf{L} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{P}^{-1}(\boldsymbol{\theta}). \quad (4.8)$$

Второе из этих выражений можно записать в виде

$$\mathbf{L} = - \left[\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{2(1 - \cos \theta) - \theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta) \theta^2} \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \boldsymbol{\theta} \right]. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) внешне выглядит сложнее, чем (4.4), но его фактическое использование часто оказывается проще. Оно сильно упрощается для так называемых изотропных потенциалов таких, что

$$\Pi(\mathbf{P}) = \Pi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}^T) = F(\text{tr } \mathbf{P}), \quad \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad (4.10)$$

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \Pi(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Rightarrow \Pi = F(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (4.11)$$

В случае (4.10) формула (4.4) может быть преобразована следующим образом

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{P}} = F'(\text{tr } \mathbf{P}) \frac{d \text{tr } \mathbf{P}}{d\mathbf{P}} = F'(\text{tr } \mathbf{P}) \mathbf{E},$$

где штрих означает производную по аргументу $\text{tr } \mathbf{P}$.

Учтем теперь формулы

$$\text{tr } \mathbf{P} = 1 + 2 \cos \theta, \quad \mathbf{P}_X = -2 \sin \theta \mathbf{m} = \frac{d \text{tr } \mathbf{P}}{d\theta} \mathbf{m}$$

и перепишем (4.4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_X = F'(\text{tr } \mathbf{P}) (\mathbf{P}^T)_X = -F'(\text{tr } \mathbf{P}) \frac{d \text{tr } \mathbf{P}}{d\theta} \mathbf{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{L} = -\frac{d\mathcal{F}}{d\theta} \mathbf{m}, \quad F(\text{tr } \mathbf{P}) = \mathcal{F}(\theta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если для $\mathcal{F}(\theta)$ принять простейшее выражение

$$\mathcal{F}(\theta) = -L\theta \Rightarrow \mathbf{L} = L \mathbf{m}, \quad (4.13)$$

то для \mathbf{L} получаем выражение момента, предложенное в работе [7].

В случае (4.11) выражение (4.9) резко упрощается и принимает вид

$$\mathbf{L} = -2\Pi'(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}, \quad (4.14)$$

где штрих означает производную по аргументу $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}$.

Чтобы получить момент (4.13), достаточно принять, что $\Pi = -L\sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}$.

Из последнего выражения видим, что энергия $\Pi = -L|\boldsymbol{\theta}|$ не слишком удачна, т.к. она имеет угловую точку в нуле. Рассмотрим поэтому другой вид консервативного момента, определяемого энергией

$$\Pi = -L\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в (4.9), получаем

$$\mathbf{L} = L \left[\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\tau} + \frac{2(1 - \cos \theta) - \theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta) \theta^2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\theta} \right]. \quad (4.16)$$

При чистом кручении стержня вектор поворота $\boldsymbol{\theta} = \theta \boldsymbol{\tau}$, а вектор момента определяется простым выражением

$$\mathbf{L} = L \boldsymbol{\tau}.$$

В этом случае модуль момента не зависит от поворота, но в общем случае (4.16) модуль потенциального момента (4.16) зависит от угла поворота $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$

$$|\mathbf{L}|^2 = \frac{L^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau})^2}{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} + \frac{L^2 [\theta^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau})^2]}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (4.17)$$

Очевидно, что для потенциальных внешних воздействий, согласно (2.6) и (4.2), имеем интеграл энергии

$$\int_{s_1}^{s_2} [\rho(\mathcal{K} + \mathcal{U}) + \Pi_1(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta})] ds + \Pi_2(\mathbf{R}(l, t), \boldsymbol{\theta}(l, t)) = \text{const}. \quad (4.18)$$

5 Прямолинейные равновесные конфигурации консольного стержня

Рассмотрим консольный стержень, нагруженный силами и моментами на незакрепленном торце. Краевые условия

$$s = 0: \quad \mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = \mathbf{E}; \quad (5.1)$$

$$s = l: \quad \mathbf{N}(l, t) = -\alpha_1 F \boldsymbol{\tau} - \alpha_2 \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{M}(l, t) = b_1 L \boldsymbol{\tau} + b_2 L \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau} + b_4 L \mathbf{L}_3 + b_3 L \frac{\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{2[1 + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau}]}}. \quad (5.3)$$

В (5.2)–(5.3) учтены наиболее популярные типы торцевых нагружений. Мертвая сила: $\alpha_1 \neq 0$. Следящая сила: $\alpha_2 \neq 0$. Мертвый момент: $b_1 \neq 0$. Следящий

момент: $b_2 \neq 0$. Полукасательный момент: $b_3 \neq 0$. Потенциальный момент: $b_4 \neq 0$. Считается, что остальные a_i и b_k равны нулю. В литературе полукасательный момент относят к потенциальным, но это верно только приближенно. В качестве потенциального будем рассматривать моменты порождаемые потенциалами

$$\Pi = -L\sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{R}' > 0, \quad \mathbf{L} = L\boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|, \quad (5.4)$$

$$\Pi = -L\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{L} = L \left[\frac{\boldsymbol{\theta} \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\tau} + \frac{2(1 - \cos \theta) - \boldsymbol{\theta} \sin \theta}{2(1 - \cos \theta) \theta^2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\theta} \right]. \quad (5.5)$$

Моменты, порождаемые этими потенциалами, определены выражениями (4.13) и (4.16) соответственно. Условие $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{R}' > 0$ исключает из рассмотрения чистый изгиб стержня.

Равновесные конфигурации находятся как решения уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}, \\ \mathbf{E} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P} \end{aligned} \quad (5.6)$$

при краевых условиях (5.1)–(5.3).

Убедимся, что задача (5.1)–(5.6) имеет решение вида

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = [s + u(s)] \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi(s)\boldsymbol{\tau}) \Rightarrow \\ \mathbf{E} = u' \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \psi' \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{N} = A_3 u' \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = C_3 \psi' \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в уравнения статики (5.4), получаем

$$A_3 u(s) = -(a_1 + a_2) Fs, \quad C_3 \psi(s) = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) Ls \quad (5.8)$$

В равновесной конфигурации (5.6)–(5.8) стержень остается прямолинейным, но оказывается сжатым и скрученным. Имеются ли в задаче (5.1)–(5.5) другие решения и каково их число? Полный ответ не известен. Следующий важный вопрос: устойчива ли конфигурация (5.6)–(5.8)? В общем случае ответ и на этот вопрос не получен, хотя много частных результатов в рамках нерастяжимого стержня известно уже давно [8, 9, 10]. Здесь мы рассмотрим частный случай о чисто моментном нагружении ($a_1 = a_2 = 0$). Имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \text{const}. \quad (5.9)$$

Пришли к задаче, аналогичной задаче о нагружении стержня мертвым моментом, но здесь постоянный момент \mathbf{M} заранее неизвестен и подлежит определению. Каков бы ни был момент \mathbf{M} первая часть решения этой задачи совпадает с тем, что было изложено в п.3. Поэтому можем написать

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \boldsymbol{\tau}), \quad \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/M, \quad M = |\mathbf{M}|, \quad (5.10)$$

где

$$\psi(s) = \frac{Ms}{C_1}, \quad \varphi(s) = \left(\frac{Ms}{C_3} - \frac{Ms}{C_1} \right) \cos \theta, \quad \cos \theta \equiv \hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (5.11)$$

Осталось определить момент \mathbf{M} . Рассмотрим отдельные случаи.

5.1 Нагружение мертвым моментом ($b_1 = 1, b_2 = b_3 = b_4 = 0$)

В этом случае $\mathbf{M} = L\boldsymbol{\tau}$, т.е. $M = |L|$, $\hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. Выбор знака у $\hat{\mathbf{M}}$ безразличен и прямолинейная конфигурация единственна.

5.2 Нагружение следящим моментом ($b_2 = 1, b_1 = b_3 = b_4 = 0$)

В этом случае $\mathbf{M} = L\mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau}$. Подставляя сюда (5.10), получаем $\mathbf{M} = L\mathbf{Q}(\psi(l)\hat{\mathbf{M}})\cdot\boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{M}} = L\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau} \Rightarrow M = |L|$, $\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau} = \pm 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. Легко убедиться, что и в этом случае прямолинейная конфигурация (5.6)–(5.8) единственна.

5.3 Нагружение полукасательным моментом

$$(b_3 = 1, b_1 = b_2 = b_4 = 0)$$

В этом случае прямолинейная конфигурация единственна при условии, что

$$|L| \neq (2k+1)\pi C_1/l. \quad (5.12)$$

В самом деле для полукасательного момента имеем равенство

$$\mathbf{M} = \frac{L(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau})}{\sqrt{2[1 + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau}]}} \Rightarrow |\mathbf{M}| = |L|.$$

Для направляющего вектора $\hat{\mathbf{M}}$ имеем ($L > 0$)

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{(1 + \cos \alpha l)\boldsymbol{\tau} + (1 - \cos \alpha l)\cos \theta \hat{\mathbf{M}} + \sin \alpha l \hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \theta + \cos \alpha l \sin^2 \theta)}},$$

где $\alpha l = Ll/C_1$, $\cos \theta = \hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau}$.

Если $\sin \alpha l \neq 0$, то $\hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ и $\hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. Легко убедиться, что при любом выборе знака мы имеем одну и ту же прямолинейную равновесную конфигурацию. Если $\sin \alpha l = 0$, $\cos \alpha l = 1$, то $\hat{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\tau}$ и мы опять приходим к прямолинейной конфигурации.

Если справедливы равенства

$$\sin \alpha l = 0, \quad \cos \alpha l = -1 \Rightarrow \alpha l = (2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (5.13)$$

то получаем

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \hat{\mathbf{M}}.$$

Следовательно, при $\cos \theta > 0$ вектор $\hat{\mathbf{M}}$ может быть любым, а при $\cos \theta < 0$ решения не существует, т.е. остается только решение $\hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. В случае (5.13) тензор поворота (5.10) принимает вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \left[(2k+1)\pi \frac{s}{l} \hat{\mathbf{M}} \right] \cdot \mathbf{Q} \left[(2k+1)\pi \left(\frac{C_1}{C_3} - 1 \right) \frac{s}{l} \boldsymbol{\tau} \right].$$

Равновесные конфигурации находятся интегрированием соотношения

$$\mathbf{R}'(s) = \left[1 - \cos \frac{(2k+1)\pi s}{l} \right] (\dot{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) \dot{\mathbf{M}} + \cos \frac{(2k+1)\pi s}{l} \boldsymbol{\tau} + \sin \frac{(2k+1)\pi s}{l} \dot{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}'(l) = 2(\dot{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\tau}, \quad \dot{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau} > 0. \quad (5.14)$$

Интегрируя (5.14), получаем винтовую линию, а точнее семейство винтовых линий, т.к. вектор $\dot{\mathbf{M}}$ остается неопределенным.

Решения (5.14) появляются только для дискретных значений момента, определяемых равенством (5.13). Таким образом, если игнорировать эти дискретные значения момента, то прямолинейная конфигурация стержня, нагруженного полукасательным моментом единственна.

5.4 Нагружение потенциальным моментом

Если принять потенциал (5.4), то для краевого момента \mathbf{L} имеем $\mathbf{L} = l\boldsymbol{\theta}(l)/|\boldsymbol{\theta}(l)|$, т.е. \mathbf{L} , а стало быть и $\mathbf{M} = \mathbf{L}$, направлен по неподвижному вектору тензора $\mathbf{P}(l)$

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}(\psi(l)\dot{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(l)\boldsymbol{\tau}) = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi(l)\boldsymbol{\tau}),$$

т.е. вектор $\dot{\mathbf{M}}$ является неподвижным вектором тензора поворота $\mathbf{Q}(\varphi(l)\boldsymbol{\tau})$. Если $\varphi(l) \neq 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то вектор $\dot{\mathbf{M}}$ находится однозначно и равен $\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\tau}$. Случай $\dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\tau}$ по существу ничего не меняет.

Если $\varphi(l) = 0$, то при $\mathbf{L} \neq 0$ имеем $\dot{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$. Но этот случай очевидно исключен условием $\boldsymbol{\theta}(l) \cdot \mathbf{R}'(l) > 0$. Поэтому рассмотрим случай

$$\varphi(l) = \left(\frac{Ml}{C_3} - \frac{Ml}{C_1} \right) (\dot{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \left(\frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_1} \right) l \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau} = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.15)$$

Видим, что и здесь, как и в случае с полукасательным моментом для каждого значения \mathbf{M} , удовлетворяющего (5.15), появляется свое семейство винтовых линий.

Практического значения выявленная неединственность, видимо, не имеет, т.к. она появляется только при больших значениях краевого момента \mathbf{L} , когда материал стержня находится далеко за пределами упругости.

Для потенциала (5.5) исследование числа решений в принципе проводится аналогично, но выливается в анализ очень громоздких уравнений. Поэтому этот анализ оставляем в стороне. Усложняется этот анализ и в том случае, когда действует комбинация рассмотренных моментов. То, что здесь могут возникнуть нетривиальные ситуации, видно уже из приведенного анализа: для мертвого и следящего моментов, взятых по отдельности, решение единственно, но для их комбинации (полукасательного момента) решение не единственно.

6 Нерастяжимый гибкий стержень

подавляющее большинство результатов, полученных в нелинейной теории стержней, относятся к случаю, когда игнорируются деформации растяжения и поперечного сдвига, а также инерция вращения. Полная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\mathbf{N}' + \rho \mathbf{F} = \rho \mathbf{S} \ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \quad (6.1)$$

Здесь мы имеем девять неизвестных функций: шесть координат векторов \mathbf{R} и \mathbf{N} и три параметра, определяющие тензор поворота. Далее в этом пункте будем рассматривать частный случай безынерционного стержня ($\rho S = 0$) с трансверсально изотропным тензором упругости \mathbf{C} . Если, кроме того, распределенная нагрузка отсутствует ($F = 0$), то ситуация упрощается еще больше, поскольку $\mathbf{N} = \text{const}$. Фактически теперь остается только три неизвестных — параметры, определяющие тензор поворота. Вектор \mathbf{R} находится по третьему уравнению системы (6.1) квадратурой. Очень часто при анализе этого случая ссылаются на аналогию, установленную Г.Кирхгофом в 1859 г., между уравнениями твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Следует, однако, иметь в виду, что, строго говоря, эта аналогия справедлива только в том случае, если вектор \mathbf{N} равен нулю. Дело в том, что в динамике твердого тела заданы начальные условия, т.е. при $t = 0$ заданы тензор поворота и вектор угловой скорости. Для консольного стержня вектор поворота при $s = 0$ задан, но вектор момента при $s = 0$ известен только в том случае, если $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Поэтому теорема единственности для решений задачи Коши в динамике твердого тела в задаче об изгибе с кручением тонкого стержня уже не применима. Имеются и другие весьма заметные отличия. В целом задачи теории стержней оказываются значительно более сложными, чем задачи динамики твердого тела.

Согласно третьему и пятому уравнению системы (6.1) имеем

$$\mathbf{R}'' = \Phi \times \mathbf{R}' \Rightarrow \Phi = (\Phi \cdot \mathbf{R}') \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \Phi \cdot \mathbf{R}'' = 0. \quad (6.2)$$

Второе из этих соотношений выражает представление Пуассона для вектора изгиба-кручения. Если тензор упругости \mathbf{C} определяется формулой (2.13), то для момента \mathbf{M} имеем

$$\mathbf{M} = C_1 \Phi + (C_3 - C_1) (\mathbf{R}' \cdot \Phi) \mathbf{R}' \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = C_3 \Phi \cdot \mathbf{R}'. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) во второе уравнение системы (6.1) и проецируя получившееся уравнение на \mathbf{R}' с учетом последнего соотношения из (6.2), получаем интеграл Пуассона (1816)

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = C_3 \Phi \cdot \mathbf{R}' = C_3 \Omega = \text{const}, \quad (6.4)$$

т.е. крутящий момент в стержне при действии только торцевых нагрузок сохраняет постоянное по длине стержня значение. Тогда имеем представления

$$\Phi = \Omega \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \mathbf{M} = C_3 \Omega \mathbf{R}' + C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \Omega = \text{const}. \quad (6.5)$$

Для безынерционного стержня в отсутствии распределенных внешних сил вектор \mathbf{N} сохраняет постоянное значение

$$\mathbf{N}(s, t) = \mathbf{N}(t) = \text{const}(s). \quad (6.6)$$

Краевые условия примем в виде

$$s = 0: \quad \mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{R}'(0, t) = \boldsymbol{\tau}; \quad (6.7)$$

$$s = l: \quad \mathbf{N}(l, t) = -\alpha_1 F \boldsymbol{\tau} - \alpha_2 F \mathbf{R}'(l, t) - \alpha_3 m \ddot{\mathbf{R}}(l, t), \quad (6.8)$$

$$\mathbf{M}(l, t) = L \mathbf{R}'(l, t). \quad (6.9)$$

Здесь мы сохраняем только следящий момент, поскольку это едва-ли не единственный случай, который легко осуществляется экспериментально. Кроме того, все основные “неприятности”, отмеченные во введении имеют место при действии следящего момента (6.9). В (6.8) включен инерционный член $m\ddot{\mathbf{R}}(l, t)$. Это означает, что к незакрепленному торцу стержня присоединено точечное тело с массой m .

В дополнение к интегралу Пуассона (6.4) имеются еще два очевидных интеграла

$$\mathbf{M}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = A(t), \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{2} \Phi(s, t) \cdot \mathbf{P}(s, t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(s, t) \cdot \Phi(s, t) + \mathbf{R}'(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = H(t). \quad (6.11)$$

Согласно (6.5) и (6.9) имеем

$$C_3 \Omega \mathbf{R}'(l, t) + C_1 \mathbf{R}'(l, t) \times \mathbf{R}''(l, t) = L \mathbf{R}'(l, t) \Rightarrow C_3 \Omega = L, \quad \mathbf{R}''(l, t) = \mathbf{0}. \quad (6.12)$$

Введем естественный базис на упругой линии: \mathbf{R}' , \mathbf{n} , $\mathbf{b} = \mathbf{R}' \times \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичная нормаль к кривой, \mathbf{b} — бинормаль, т.е.

$$\mathbf{R}''(s, t) = \frac{1}{\rho(s, t)} \mathbf{n}(s, t), \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R}' \times \mathbf{n}. \quad (6.13)$$

Последнее равенство в (6.12) показывает, что кривизна упругой линии $1/\rho(l, t)$ на незакрепленном торце стержня равна нулю. С учетом (6.5) и (6.12) интегралы (6.10) и (6.11) можно переписать в виде

$$\frac{C_1}{\rho(s, t)} \mathbf{b}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = L(T(l, t) - T(s, t)), \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{C_1}{\rho^2(s, t)} = T(l, t) - T(s, t), \quad T(s, t) \equiv \mathbf{R}'(s, t) \cdot \mathbf{N}(t), \quad (6.15)$$

где $T(s, t)$ — продольная сила в стержне.

Выражения векторов изгиба-кручения и момента (6.5) с учетом (6.12), (6.14) и (6.15) можно переписать в виде

$$\Phi(s, t) = \frac{L}{C_3} \mathbf{R}'(s, t) + \frac{1}{\rho(0, t)} \sqrt{\frac{T(l, t) - T(s, t)}{T(l, t) - T(0, t)}} \mathbf{b}(s, t), \quad (6.16)$$

$$\mathbf{M}(s, t) = L \mathbf{R}'(s, t) + \frac{C_1}{\rho(0, t)} \sqrt{\frac{T(l, t) - T(s, t)}{T(l, t) - T(0, t)}} \mathbf{b}(s, t), \quad (6.17)$$

Кроме того, из (6.14) и (6.15) при $\rho^{-1}(s, t)$ не равном тождественно нулю следует, что

$$\frac{L}{2\rho(s, t)} = \mathbf{b}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t). \quad (6.18)$$

Из (6.14)–(6.17) видно сколь важную роль играет продольная сила в стержне. Таким образом, проекция уравнения моментов на \mathbf{R}' дает нам интеграл Пуассона (6.4),

проекция на \mathbf{N} дает интеграл (6.10) и проекция на Φ дает интеграл энергии (6.11).

Если векторы \mathbf{R}' , \mathbf{N} и Φ линейно независимы, т.е. если выполнено неравенство

$$\frac{1}{\rho(0,t)} \sqrt{\frac{T(l,t) - T(s,t)}{T(l,t) - T(0,t)}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \neq 0,$$

то уравнение моментов $\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ выполнено полностью. Впрочем, проекция этого уравнения на нормаль \mathbf{n} дает еще одно полезное тождество

$$\frac{3L}{2\rho^3(s,t)} + \frac{C_1}{\rho(0,t)} \sqrt{\frac{T(l,t) - T(s,t)}{T(l,t) - T(0,t)}} (\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') \cdot \mathbf{R}''' = 0, \quad (6.19)$$

из которого видно, что при $L = 0$ кручение упругой линии отсутствует.

Дальнейшее интегрирование уравнений нерастяжимого стержня в общем случае едва ли имеет смысл, т.к. даже уже полученные интегралы опираются на допущения типа: если кривизна не равна нулю тождественно, если продольная сила в стержне не постоянна и т.д. Поэтому в дальнейшем ограничимся анализом конкретных частных случаев.

Важно подчеркнуть следующее. Несмотря на то, что для нерастяжимого стержня получено большое количество частных результатов, тем не менее в общем случае не доказана даже разрешимость основных уравнений (6.1) при краевых условиях (6.7)–(6.9).

7 Эластика Эйлера. Нагружение следящей силой

Эластикой Эйлера принято называть задачу (6.1), (6.7)–(6.9) при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $L = 0$. Плоские формы равновесия в этой задаче хорошо изучены еще Л.Эйлером. Покажем, что равновесных конфигураций, отличных от плоских, не существует. Согласно (6.5) и (6.12) в эластике Эйлера для момента имеем

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' \quad (7.1)$$

Если $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, т.е. если $\mathbf{R}'' = \mathbf{0}$, имеем только прямолинейную равновесную конфигурацию $\mathbf{R} = s\boldsymbol{\tau}$. Поэтому рассмотрим случай $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$. Интеграл (6.10) принимает вид

$$\mathbf{M}(s,t) \cdot \mathbf{N}(t) = -C_1 F(\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что векторы $\mathbf{R}'(s)$, $\mathbf{R}''(s)$ и $\boldsymbol{\tau}$ лежат в одной плоскости. Поскольку $\mathbf{R}''(s) \neq \mathbf{0}$, то справедливо разложение

$$\mathbf{R}''(s) = \mu \boldsymbol{\tau} + \lambda \mathbf{R}'(s) = \mu [\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}') \mathbf{R}'], \quad \mu \neq 0. \quad (7.2)$$

Уравнение моментов с учетом (7.1) дает

$$\mathbf{R}' \times [C_1 \mathbf{R}''' - F\boldsymbol{\tau}] = \mathbf{0} \Rightarrow C_1 \mathbf{R}''' = F\boldsymbol{\tau} + q(s)\mathbf{R}'(s),$$

т.е. вектор \mathbf{R}''' также лежит в плоскости, натянутой на $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{R}' . Если $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$, то для бинормали \mathbf{b} можем написать

$$\mathbf{b} = \rho \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \rho \mu \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau}, \quad (7.3)$$

где учтено (7.2). Дифференцируя (7.3) по s и вновь используя (7.2), получаем

$$\mathbf{b}' = (\rho \mu)' \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau} + \rho \mu \mathbf{R}'' \times \boldsymbol{\tau} = [(\rho \mu)' - \rho \mu^2 (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}')] \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau}.$$

Проецируя это выражение на \mathbf{b} с учетом (7.3) и учитывая, что \mathbf{b}' ортогонален \mathbf{b} , т.к. $|\mathbf{b}| = 1$, получаем

$$(\rho \mu)' - \rho \mu^2 (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}') = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = \text{const.}$$

Итак, вектор бинормали к упругой линии постоянен не только по модулю, но и по направлению, т.е. равновесная конфигурация, если она существует и отлична от прямолинейной, является плоской.

Для вектора $\mathbf{R}'(s)$ имеем выражение

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{Q}(\theta(s) \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \cos \theta \boldsymbol{\tau} + \sin \theta \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau},$$

т.к. \mathbf{R}' всегда принадлежит плоскости, ортогональной \mathbf{b} и, следовательно может поворачиваться только вокруг \mathbf{b} . Для угла нутации получаем известную задачу

$$C_1 \theta'' + F \sin \theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (7.4)$$

Решение задачи (7.4) также хорошо известно: при $F < 0$, т.е. при растяжении имеем только тривиальное решение $\theta = 0$; при $F > 0$, т.е. при сжатии стержня, нетривиальные решения появляются при $F \geq \pi^2 C_1 / 4l^2$. Число дополнительных решений растет с ростом величины F . Таким образом, все множество решений в эластике Эйлера исчерпывается двухпараметрическим множеством тензоров поворота

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta_k(s) \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{Q}(\psi \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{b}_0, \quad \psi = \text{const}(s), \quad (7.5)$$

где $k = 0, 1, \dots, n$; n определяется величиной $F > 0$, $\theta_0 = 0$. Решение зависит от одного вектора \mathbf{b}_0 : $|\mathbf{b}_0| = 1$, $\mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ и одного параметра ψ , который может зависеть, например, от времениподобного параметра. Определение вектора положений по равенству $\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$ не изменится, если вместо тензора (7.5) рассмотреть тензор

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta_k \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(s) \boldsymbol{\tau}).$$

Вычисляя для этого тензора вектор изгиба-кручения, получаем

$$\boldsymbol{\Phi} = \theta' \mathbf{b} + \varphi' \mathbf{R}' \Rightarrow \varphi' = 0,$$

что немедленно следует из (6.16). Поэтому (7.5) дает максимально полное выражение для тензора поворота в эластике Эйлера.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть $F > \pi^2 C_1 / 4l^2$, т.е. пусть F превышает эйлерову критическую силу. Тогда согласно вышесказанному имеем, как

минимум, две равновесных конфигурации: прямолинейная и плоско-изогнутая. Считается, что прямолинейная конфигурация неустойчива и изогнутая — устойчива, хотя это последнее утверждение, строго говоря, никем не доказано. Обычно доказательства подменяются энергетическими рассуждениями, но они не вполне убедительны, т.к. хотя энергия и достигает минимума в изогнутой равновесной конфигурации, но этот минимум не изолирован, что хорошо видно из выражений (7.5): имеется не одна, а континуум равновесных конфигураций, т.е. налицо ситуация типа нейтрального равновесия.

Нагружение стержня торцевой следящей силой ($\alpha_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_3 = 0, L = 0$.) мало отличается от эластики Эйлера по характеру исследования, но результаты анализа оказываются другими. Здесь также, как в эластике Эйлера, доказывається, что равновесные конфигурации могут быть только плоскими. Различие получается в задаче нахождения угла нутации θ . Вместо (7.4) получаем задачу

$$C_1 \theta'' + F \sin(\theta - \theta(l)) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0,$$

или после замены переменной $\psi = \theta - \theta(l)$

$$C_1 \psi'' + F \sin \psi = 0, \quad \psi(l) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \quad (7.6)$$

Для функции $\psi(s)$ получили задачу Коши, а не краевую задачу типа (7.4). Известно, что задача Коши (7.6) имеет только нулевое решение $\psi(s) = 0$, т.е. $\theta(s) = \theta(l)$. Но при $s = 0$ угол θ равен нулю и, следовательно, он равен нулю при всех s . Таким образом, при нагружении стержня следящей силой имеем только прямолинейную равновесную конфигурацию.

8 Нагружение стержня мертвой силой и следящим моментом

Рассмотрим консольный стержень, нагруженный мертвой силой и следящим моментом, т.е. в (5.2)–(5.3) примем: $\alpha_1 = 1, b_2 = 1, \alpha_2 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$. Докажем, что в этом случае равновесная конфигурация (5.8) единственна. Будем рассматривать растяжимый стержень с учетом деформации поперечного сдвига. Обращая первое из соотношений (2.14) с учетом равенства $\mathbf{N} = -F\boldsymbol{\tau}$, получаем

$$\mathbf{R}' = \alpha \mathbf{m} - F\boldsymbol{\tau}/A_1, \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{P}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \alpha \equiv 1 + \left(\frac{F}{A_1} - \frac{F}{A_3} \right) \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (8.1)$$

Уравнение моментов принимает вид

$$\mathbf{M}' + \alpha F \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (8.2)$$

Для вектора изгиба-кручения имеем представление Пуассона

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{m}' \Rightarrow \mathbf{M} = C_3 (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \mathbf{m} + C_1 \mathbf{m} \times \mathbf{m}'. \quad (8.3)$$

Из второго выражения (8.3) получаем $\mathbf{M} \cdot \mathbf{m}' = 0$. Учитывая это равенство и проецируя (8.2) на \mathbf{m} , получаем интеграл Пуассона

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{m})' - \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}' = 0 \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{m} = C_3 \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Phi} = C_3 \Omega = \text{const}. \quad (8.4)$$

По краевому условию $\mathbf{M}(l) = L\mathbf{m}(l)$ и (8.3)–(8.4) получаем $C_3\Omega = L$. Кроме того, из (8.3) получаем условие $\mathbf{m}'(l) = \mathbf{0}$.

Итак, получили

$$\mathbf{M} = L\mathbf{m} + C_1\mathbf{m} \times \mathbf{m}', \quad \Phi = \frac{L}{C_3}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{m}', \quad \mathbf{m}'(l) = \mathbf{0}. \quad (8.5)$$

Проецируя (8.2) на $\boldsymbol{\tau}$ и учитывая (8.5), получаем интеграл

$$L\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau} + C_1(\mathbf{m} \times \mathbf{m}') \cdot \boldsymbol{\tau} = L \Rightarrow \mathbf{m}(l) \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \Rightarrow \mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\tau}. \quad (8.6)$$

Первая часть первого из соотношений (8.6) следует, если (8.6) записать при $s = 0$. Обратим внимание, что последнее равенство в (8.6) справедливо только при $L \neq 0$. Умножая (8.2) скалярно на Φ , получаем интеграл энергии, который с учетом (8.5)–(8.6) можно записать в виде

$$C_1|\mathbf{m}'|^2 = -F(1 - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{F}{A_1} - \frac{F}{A_3} \right) (1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}) \right]. \quad (8.7)$$

Записывая это выражение при $s = 0$ и учитывая условие $\mathbf{m}(0) = \boldsymbol{\tau}$, получаем, что $\mathbf{m}'(0) = \mathbf{0}$. Подставляя первое из выражений (8.5) в (8.2), получаем задачу Коши

$$C_1\mathbf{m} \times \mathbf{m}'' + L\mathbf{m}' + \alpha F\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}(0) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{m}'(0) = \mathbf{0},$$

которая имеет единственное решение

$$\mathbf{m}(s) = \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{P}(s) \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi(s)\boldsymbol{\tau}). \quad (8.8)$$

Теперь по (8.1) получаем

$$\mathbf{R}' = \left(1 - \frac{F}{A_3} \right) \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{R} = \left(1 - \frac{F}{A_3} \right) s \boldsymbol{\tau}.$$

В результате пришли к равновесной конфигурации (5.8). Поскольку при этом использовались только необходимые условия, то этим доказывается единственность конфигурации (5.8).

В данной задаче можно отметить два любопытных обстоятельства. Первое. Когда мы решаем задачу при краевых условиях $\mathbf{N}(l) = -F\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}(l) = L\mathbf{P}(l) \cdot \boldsymbol{\tau}$, то можно ожидать, что из решения при $L \neq 0$ при предельном переходе $L \rightarrow 0$ мы получим решение задачи $\mathbf{N}(l) = -F\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}(l) = \mathbf{0}$. Однако это не совсем так. Если $L \neq 0$, то решение задачи единственно. Если же $L = 0$, то мы имеем дело с эластикой Эйлера и неединственными решениями. Разгадка “парадокса” в том, что при сколь угодно малом $L \neq 0$, мы имеем по (8.6) равенство $\mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\tau}$, которое не обязано выполняться при $L = 0$. Оно и не выполняется в эластике Эйлера. Второе обстоятельство объяснить труднее и оно заключается в следующем. Вообразим себе, что консольный стержень нагружен мертвой силой $\mathbf{N} = -F\boldsymbol{\tau}$, где $F > \pi^2 C_1 / 4l^2$, т.е. F больше эйлеровой критической. В этом случае имеются, как минимум, две равновесных конфигурации: прямолинейная и изогнутая. Рассмотрим искривленную равновесную конфигурацию. Допустим, что к незакрепленному торцу в дополнение к мертвой силе прикладывается

скольз-угодно малый следящий момент. При этом равновесие нарушается и стержень приходит в движение. Если стержень был изогнут достаточно сильно, то близких равновесных конфигураций не существует. Поэтому возможна альтернатива: либо а) под действием скольз-угодно малого момента стержень перескочет в далеко отстоящую прямолинейную равновесную конфигурацию, что интуитивно мало вероятно, либо б) стержень придет в безостановочное движение. В последнем случае важно было бы установить характер этого движения: затухающее (стремление к прямолинейной равновесной конфигурации), нарастающее по амплитуде (неустойчивость) или, наконец, стационарные вращения. Задачи подобного типа до сих пор не исследованы.

9 Стационарные движения в эластике Эйлера

Известна роль, которую играют, например, в динамике твердого тела стационарные движения. Покажем, что они возможны и в динамике упругих стержней. В п.7 было найдено общее выражение для тензора поворота — формула (7.5) — в эластике Эйлера. Рассмотрим динамическую задачу для нерастяжимого упругого стержня

$$\mathbf{N}' = \rho S \ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = C_1 \boldsymbol{\Phi} + (C_3 - C_1) \mathbf{R}' (\mathbf{R}' \cdot \boldsymbol{\Phi}). \quad (9.1)$$

Стационарные движения определяются тензором поворота вида

$$\mathbf{P}(t, s) = \mathbf{Q}(\psi(t) \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Q}(\theta(s) \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi(t) \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (9.2)$$

Вектор изгиба-кручения $\boldsymbol{\Phi}$, отвечающий (9.2), имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi} = \theta'(s) \mathbf{Q}(\psi(t) \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{e} \equiv \theta'(s) \mathbf{e}_*(t), \quad \mathbf{e}_*(t) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (9.3)$$

Согласно (9.1) имеем

$$\mathbf{R}' = \cos \theta \boldsymbol{\tau} + \sin \theta \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' \cdot \mathbf{e}_* = 0. \quad (9.4)$$

Имеем очевидные формулы

$$\dot{\mathbf{e}}_* = \dot{\psi} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{e}_*, \quad \ddot{\mathbf{e}}_* = \ddot{\psi} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{e}_* - \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_*.$$

Поскольку ищутся стационарные движения, то примем, что

$$\dot{\psi} = \omega = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{e}}_* = -\omega^2 \mathbf{e}_*, \quad \mathbf{R}'' = -\omega^2 \sin \theta \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}. \quad (9.5)$$

Дифференцируя первое из уравнений (9.1) по s и используя (9.2)–(9.5), получаем

$$\mathbf{N}'' = \rho S \omega^2 \sin \theta \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{N}'|_{s=0} = \mathbf{0}. \quad (9.6)$$

Последнее из этих условий вытекает из первого уравнения системы (9.1)

Из (9.6) и краевого условия $\mathbf{N}(l) = -Q \boldsymbol{\tau}$ следуют два интеграла

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_* = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} = -Q.$$

Следовательно, общее выражение для $\mathbf{N}(s, t)$ имеет вид

$$\mathbf{N}(s, t) = -Q \boldsymbol{\tau} + T(s, t) \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}.$$

Подставляя это выражение в (9.6), получаем

$$T''(s, t) = -\rho S \omega^2 \sin \theta(s). \quad (9.7)$$

Интегрируя это соотношение с учетом краевых условий, получаем выражение

$$T(s, t) = \rho S \omega^2 \left[\int_0^l ds_1 \int_0^{s_1} \sin \theta(\xi) d\xi - \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} \sin \theta(\xi) d\xi \right],$$

из которого видим, что на самом деле поперечная сила $T(s, t)$ должна зависеть только от s . Итак, окончательно имеем

$$\mathbf{N}(s, t) = -Q \boldsymbol{\tau} + T(s) \mathbf{e}_*(t) \times \boldsymbol{\tau}, \quad T''(s) = -\rho S \omega^2 \sin \theta(s). \quad (9.8)$$

Используя полученные выше выражения, второму из уравнений (9.1) придаем вид

$$C_1 \theta'' + \cos \theta T + Q \sin \theta = 0. \quad (9.9)$$

Получили систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Краевые условия для нее имеют следующий вид

$$\begin{aligned} s = 0 : \quad & \theta(0) = 0, \quad T'(0) = 0; \\ s = l : \quad & \theta'(l) = 0 \quad (\Leftrightarrow \mathbf{M}(l) = \mathbf{0}), \quad T(l) = 0 \quad (\Leftrightarrow \mathbf{N}(l) = -Q \boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Исключая из (9.9) и (9.10) поперечную силу $T(s)$, получаем нелинейную спектральную задачу Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \right] + 2q \frac{d^2 \operatorname{tg} \theta}{d\xi^2} - \lambda^2 \sin \theta = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (9.11)$$

где

$$2q = \frac{Q l^2}{C_1}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho S \omega^2 l^4}{C_1}, \quad s = \xi l, \quad \theta = \theta(\xi). \quad (9.12)$$

Краевые условия для (9.11) следуют из (9.10) и (9.9)

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad & \theta(0) = 0, \quad \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \right] + 2q \frac{d \operatorname{tg} \theta}{d\xi} = 0; \\ \xi = 1 : \quad & \frac{d\theta}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + 2q \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Стационарные вращения консольного стержня, нагруженного мертвой силой, существуют, если существуют такие $\lambda^2 > 0$, при которых задача (9.11), (9.13) имеет нетривиальное решение $\theta(\xi) \neq 0$. Строгое доказательство разрешимости задачи

(9.11)–(9.13) в настоящее время отсутствует. Приведем ее асимптотический анализ, справедливый для относительно малых углов $\theta(\xi)$. Введем обозначения

$$\theta(\xi) = \mu \gamma(\xi, \mu), \quad \mu = \max_{\xi \in [0,1]} |\theta(\xi)|, \quad |\gamma| \leq 1. \quad (9.14)$$

Будем искать малые решения задачи (9.11)–(9.13) в виде разложений

$$\gamma(\xi, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\xi) \mu^k, \quad \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mu^k. \quad (9.15)$$

Подставляя (9.15) в (9.11) и (9.13), приходим к задаче

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^{IV} + 2q\gamma'' - \lambda^2\gamma \right] + \mu^2 \left[\frac{\text{tg } \mu\gamma}{\mu} (2\gamma'\gamma''' + \gamma''^2) + \gamma'^2\gamma'' - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \left(\frac{\sin \mu\gamma}{\mu} - \gamma \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4q \sin \mu\gamma}{\mu \cos^2 \mu\gamma} \gamma'^2 \right] + \mu^4 \left[\frac{2 \text{tg}^2 \mu\gamma}{\mu^2} \gamma'^2\gamma'' \right] = 0, \quad f' \equiv df/d\xi, \quad (9.16) \end{aligned}$$

$$\xi = 0 : \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma''' + 2q\gamma' + \mu^2 \left[\frac{\text{tg } \mu\gamma}{\mu} \gamma'\gamma'' + 2q \frac{1 - \cos \mu\gamma}{\mu^2 \cos \mu\gamma} \gamma' \right] = 0;$$

$$\xi = 1 : \quad \gamma'(1) = 0, \quad \gamma'' + 2q\gamma + 2q\mu^2 \left[\frac{\sin \mu\gamma - \mu\gamma}{\mu^3} \right] = 0. \quad (9.17)$$

В (9.16)–(9.17) разложения всех выражений, стоящих в квадратных скобках начинаются с членов порядка $O(1)$. Для главных членов асимптотических разложений (9.15), получаем линейную спектральную задачу

$$\gamma_0^{IV} + 2q\gamma_0'' - \alpha_0\gamma_0 = 0,$$

$$\xi = 0 : \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_0''' + 2q\gamma_0' = 0; \quad \xi = 1 : \quad \gamma_0' = 0, \quad \gamma_0'' + 2q\gamma_0 = 0. \quad (9.18)$$

Эта спектральная задача хорошо изучена.

Список литературы

- [1] Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
- [2] Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНТИ N1912-B87 Деп., 20 с.
- [3] Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces. Int. J. Solids Structures, 1976, vol. 12, pp.635-648.
- [4] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ, N 386, 1982, с.29-46.

- [5] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, 1992, N 443, с.100-121.
- [6] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 76 (1996), 4. pp.187-204.
- [7] Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. N 448. с.47-56.
- [8] Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.
- [9] Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
- [10] Циглер Г. Основы теории упругой устойчивости. М.: МИР, 1971. 192 с.

А. И. Лурье — работы по механике*

Аннотация

Доклад посвящен вкладу А.И. Лурье в развитие механики в России. Следует отметить, что научные интересы А.И. Лурье были чрезвычайно широки и касались различных областей механики и процессов управления. Книги и учебники А.И. Лурье, по которым обучались сотни тысяч студентов, инженеров и научных работников, дают высокий пример научного творчества. В 1927 г. было основано Ленинградское механическое общество, которое сыграло важную роль в развитии механики в СССР. Одним из организаторов этого общества был А.И. Лурье. Среди многих достижений этого общества были организация и издание широко известного журнала “Прикладная математика и механика”. А.И. Лурье был редактором переводов многих выдающихся книг по механике. А.И. Лурье признается научным сообществом как выдающийся ученый-энциклопедист. А.И. Лурье был членом национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, а 1961 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. Имя А.И. Лурье навсегда останется в истории Российской механики.

1 Введение

Человек не выбирает время и место своего рождения. Однако время и страна проживания в значительной степени влияют на формирование человека и определяют характер его деятельности. Тем не менее, во все времена и во всех странах рождаются особые люди, которые реализуются как самостоятельные и самодостаточные сущности. Эти люди исполняют роль катализатора эволюции общества, членами которого они являются. Задачи, которые они решают, никогда не являются случайными, но определяются высшими потребностями общества. Именно способность человека не только интуитивно осознать высшие потребности общества, но и принять их в качестве руководства к действию, является главным признаком реализованной личности. Поэтому корректная оценка вклада той или иной личности в эволюцию общества или некоей части этого общества невозможна без ясного понимания состояния общества и его потребностей на рассматриваемом этапе эволюции. Невозможно усомниться в том, что Анатолий Исакович Лурье реализовался как самостоятельная

*Жилин П.А. “А. И. Лурье — работы по механике” // Труды XXVIII летней школы “Актуальные проблемы механики”, Санкт-Петербург, 2001. С. 1–13.

сущность, многогранные плоды деятельности которой мы так явственно ощущаем. Целью данного доклада является обсуждение вклада А.И. Лурье в развитие механики в России. Самостоятельные исследования А.И. Лурье в области механики начались в 1925 году сразу после окончания им физико-механического факультета Ленинградского политехнического института. Вспомним Россию, какой она была в 1925 году. Предшествующее десятилетие привело Россию в крайне тяжелое состояние. Первая мировая война, революция и, наконец, братоубийственная гражданская война, худшая и наиболее опасная для жизни общества из всех возможных видов войн. Научная интеллигенция малочисленна и разобщена, промышленность, и без того относительно слабая, разрушена, денег на приобретение необходимого оборудования нет. Вдобавок ко всему, Россия находится в практически полной изоляции от мирового сообщества. Следовательно, одной из первоочередных задач становится развитие собственной промышленности. Традиционно в России была относительно хорошо развита судостроительная промышленность, но другие области промышленности (общее и энергетическое машиностроение, турбиностроение, приборостроение, авиастроение и т.д.) находились в зачаточном состоянии. Все это необходимо было создавать заново. А для этого, прежде всего, нужно было подготовить десятки тысяч инженеров. При этом следует иметь в виду, что инженерные кадры нужно было готовить из относительно малограмотных людей, ибо школы в период с 1914 по 1922 год также работали в ненормальных условиях. Чтобы готовить инженерные кадры, были необходимы люди, способные их готовить, а также учебники, по которым могли бы учиться будущие инженеры. Нельзя сказать, что в России не было ученых в области механики. Они были и притом достаточно высокого класса. Достаточно вспомнить Н.Е. Жуковского, И.Г. Бубнова, И.В. Мещерского, А.А. Фридмана, А.Н. Крылова, П.Ф. Папковича, Е.Л. Николаи и других. Но для такой огромной страны, как Россия, их было крайне мало. Что касается учебников по механике для высших технических учебных заведений, то их практически не было. Именно в таких условиях пришлось начинать работать поколению, к которому принадлежал А.И. Лурье, российских ученых в области фундаментальных и технических наук. Оценкой их труда послужил запуск 4 октября 1957 года первого в мире искусственного спутника Земли и тот факт, что к 1960 году техническое образование в России признавалось мировым сообществом одним из лучших в мире. После окончания института А.И. Лурье был оставлен преподавателем на кафедре «Теоретическая механика» Ленинградского политехнического института. С этого момента и начинаются многолетние научные исследования А.И. Лурье. Необходимо подчеркнуть, что интересы А.И. Лурье были чрезвычайно широки и относились к разным областям механики и теории управления. Объясняется это тем, что А.И. Лурье был тесно связан с организациями, занимающимися разработкой и производством новой техники. Среди этих организаций, в первую очередь, нужно указать Ленинградский металлический завод, Особое техническое бюро и Особое конструкторское бюро. Как известно, создание новой техники необходимо сопровождается многочисленными проблемами из области механики и теории управления. В послевоенные годы его связи с производственными организациями существенно расширились. Многообразные запросы практики вынуждали А.И. Лурье проводить исследования сразу по нескольким направлениям. Поэтому, при описании работ А.И. Лурье по механике, придется разбивать эти работы на отдельные циклы и при этом нарушать хронологическую последовательность. Что касается ра-

бот А.И. Лурье по теории управления, в которую он внес весьма заметный вклад, то они служат темой отдельного обсуждения.

2 У истоков ленинградской школы механики

А.И. Лурье был не только выдающимся ученым, но и выдающимся Учителем и педагогом. У него остались сотни учеников, многие из которых добились мировой известности. Книги и учебники А.И. Лурье, по которым учились десятки и сотни тысяч будущих инженеров, продолжают оставаться высокими образцами научного творчества. Научный стиль А.И. Лурье отличался особой ясностью и строгостью, никогда не сопровождавшейся наукообразными излишествами. Он придавал большое значение разработке аппарата, позволяющего решать рассматриваемые проблемы наиболее эффективно и, вместе с тем, наглядно. В частности, он был убежденным приверженцем прямого тензорного исчисления и внес в его развитие и распространение заметный вклад.

В 1927 году было учреждено Ленинградское механическое общество, которое сыграло большую роль в развитии механики в СССР. Неизменным председателем и организатором этого общества был профессор Е.Л. Николаи, а секретарем был А.И. Лурье. Среди многих достижений общества необходимо выделить организацию издания первого в СССР специализированного журнала по механике и прикладной математике. Первоначально, начиная с 1929 года, он выходил под названием “Вестник механики и прикладной математики”. В 1933 году журнал был преобразован во всесоюзный журнал “Прикладная математика и механика”. До 1937 года, когда издание журнала было передано Институту проблем механики АН СССР и переведено в Москву, Е.Л. Николаи был его главным редактором, а ответственным секретарем был А.И. Лурье.

Как уже отмечалось во введении, в те годы в России практически отсутствовала специальная литература по механике. Изучать механику приходилось по оригинальным изданиям на английском, немецком и французском языках, что и делал А.И. Лурье, но не могли делать многие из тех, для кого знание механики являлось необходимостью. Поэтому была настоятельная потребность в издании переводов научной литературы. В этой важной работе А.И. Лурье принимал самое активное участие. В частности, под его редакцией вышли переводы многих замечательных книг по механике. Среди них можно указать: Е. Треффц “Математическая теория упругости” (1934), И.В. Геккелер “Статика упругого тела” (1934), П. Пфейффер “Колебания упругих тел” (1934), Лагранж “Аналитическая механика” (1938), К. Трусделл “Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред” (1975) и многие другие переводы. Следует подчеркнуть, что в 30-е годы переводы западных источников сыграли большую роль в подготовке инженерных кадров в СССР.

Научные заслуги А.И. Лурье общепризнаны. Мировому научному сообществу он известен, как выдающийся ученый-энциклопедист. А.И. Лурье являлся членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, а в 1961 году был избран член-корреспондентом АН СССР. По выражению академика АН СССР В.В. Новожилова, А.И. Лурье относился к тем избранным ученым, высшим научным званием которых были их имена.

3 Операционное исчисление

Первые работы А.И. Лурье были связаны с гидродинамикой вязких жидкостей. Этой теме была посвящена диссертация А.И. Лурье, защищенная в 1929 году. Вообще говоря, в то время никаких диссертаций не защищалось. Тем не менее, диссертация была написана и рассмотрена на заседании Ученого совета. Оппонентами выступали известные ленинградские профессора В.А. Фок и А.А. Саткевич. По диссертации было принято положительное заключение, которое было отправлено в архив совета. Научные степени были восстановлены в СССР только в 1933 году, и тогда же А.И. Лурье была присуждена ученая степень доктора технических наук без защиты диссертации. Кстати, к этому времени А.И. Лурье уже имел ученое звание профессора. Хотя работы по гидродинамике вязких жидкостей и не относятся к числу важнейших достижений А.И. Лурье, тем не менее, в них, впервые в задачах такого рода, был использован новый для этой области механики метод, основанный на операционном исчислении. Подобный подход очень понравился В.А. Фоку, и он посоветовал А.И. Лурье продолжить исследования в этом направлении. В конечном счете, эти исследования завершились опубликованием статьи “К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами” (Труды ленинградского индустриального института, №6, 1937, сс. 31-36) и монографии “Операционное исчисление” (М.-Л.: ОНТИ, 1938). Позднее эти исследования были значительно дополнены и привели к созданию символического метода А.И. Лурье, который будет обсуждаться в разделе, посвященном работам по теории упругости.

Идея операционного исчисления была предложена Оливером Хевисайдом в 1893 году. В дальнейшем она получила развитие в работах Т.Дж. Бромвича, Е.П. Адамса, Б.Б. Бейкера, Е.Дж. Берга, Дж. Карсона, Х. Джеффриса и ряда других западных ученых. Как правило, операционные методы применялись для расчета электрических цепей. Тем не менее, к концу 30-х годов они не получили должного распространения в математической физике. Как отмечает Х. Джеффрис, причиной этому послужили многие неясности в основах и отсутствие систематического изложения операционных методов. Впервые это было сделано в книге: Harold Jeffreys. Operational methods in mathematical physics. London, Cambridge, 1927. Второе издание этой книги вышло в 1931 году. Как видим, к 1930 году операционное исчисление уже получило некоторое распространение, главным образом, в Англии. Поэтому говорить о вкладе А.И. Лурье в собственно операционное исчисление, конечно, нельзя. Заслуга его в другом. Во-первых, Запад — это Запад, а Россия двадцатых-тридцатых годов — это страна, в которой просто ознакомиться с достижениями иностранных ученых было большой проблемой. Во-вторых, отвлеченные идеи, пусть даже и весьма перспективные, для технического образования России того времени были не вполне пригодны. Нужны были убедительные приложения к конкретным проблемам технического характера. Именно это и было сделано А.И. Лурье. В частности, в вышеуказанной статье от 1937 года в качестве примеров были рассмотрены две хорошо известные проблемы. Первая относилась к обтеканию твердого тела потоком вязкой жидкости. Здесь на основе операционного исчисления буквально в несколько строчек было получено решение, построенное Л.С. Лейбензоном другим методом в 1935 году. Вторым примером явился вывод общего решения уравнений статики в линейной теории упругости. Это решение, без вывода, было опубликовано Б.Г. Галеркиным в 1930 году в Докладах

АН СССР. Немного ранее он докладывал это решение на заседании Ленинградского механического общества, причем доклад состоял из выписанных на доске формул и предложения проверить, что они действительно удовлетворяют уравнениям равновесия теории упругости и позволяют выполнить любые краевые условия. В статье А.И. Лурье впервые дается полный вывод решения Б.Г. Галеркина. Наконец, в этой же статье А.И. Лурье тем же методом получает решение динамических уравнений Ламе, которое в статическом случае переходит в решение Б.Г. Галеркина. В монографии “Операционное исчисление” приводится огромное количество решенных задач, имеющих самостоятельное значение и ярко выраженную техническую направленность. Поэтому монография быстро стала настольной книгой инженеров, работающих в разного рода расчетных бюро. Такая же судьба была уготована и большинству других книг А.И. Лурье.

В заключение этого раздела отметим еще одну работу А.И. Лурье. В конце 30-х годов на Ленинградском металлическом заводе при создании мощных паровых турбин столкнулись с новым для того времени явлением: самовозбуждением интенсивных вибраций в трубопроводах высокого давления. Позднее это явление было названо гидродинамическим ударом. Вибрации были настолько интенсивными, что тряслись стены огромного цеха. К исследованию этой проблемы был привлечен А.И. Лурье, который, совместно со своим сотрудником А.И. Чекмаревым, разработал расчетную схему и провел соответствующие расчеты. Последние полностью подтвердили наблюдаемое явление самовозбуждения вибраций в трубопроводе. Это, видимо, было первым решением задачи такого рода. Значительно позднее аналогичные расчеты проводились под руководством А.И. Лурье его учениками и сотрудниками (В.А. Пальмов, А.А. Первозванский, В.А. Пупырев) и для трубопроводов другого типа. При решении задачи использовался операционный метод. Трудность возникла при формулировке критериев устойчивости. Обычные критерии (типа Гурвица, Михайлова и др.) здесь не работали, т.к. критические числа нужно было искать из трансцендентного уравнения. Эта проблема в общем случае не решена и поныне. Однако численные расчеты удалось выполнить полностью.

4 Аналитическая механика

Уже отмечалось, что, сразу после окончания института, А.И. Лурье начал преподавать теоретическую механику. Кафедрой “Теоретическая механика” в то время руководил известный ученый И.В. Мещерский — автор, помимо прочего, уникального задачника по теоретической механике, выдержавшего к настоящему времени 38 изданий и переведенного на многие языки. Между прочим, именно И.В. Мещерский впервые в мире ввел в употребление практические занятия, как самостоятельный вид обучения. Следует иметь в виду, что в то время предмет “теоретическая механика”, как элемент технического образования, вообще не существовал нигде в мире. Существовала дисциплина “аналитическая механика”, которая преподавалась на математических факультетах университетов. Можно указать знаменитые курсы Е.Т. Уиттекера “Аналитическая динамика” и П. Аппеля “Теоретическая механика”. Были и другие курсы, но ни один из них не был переведен на русский язык. В России был издан в 1922 году литографированный курс лекций по аналитической механике профессо-

ра ленинградского университета Н.В. Розе. Все эти курсы были мало пригодны для преподавания в технических вузах, выпускающих инженеров-практиков. Поэтому существовала настоятельная потребность в таком учебнике по теоретической механике для технических вузов, который, в доступном изложении, сочетал бы в себе все достижения теоретической мысли с практическими применениями. В настоящее время, когда уровень развития фундаментальной механики в России заметно превосходит таковой на Западе, трудно осознать всю громаду проблемы, стоящей в то время перед техническим образованием России. Лозунг “догнать и перегнать” тогда даже не стоял в повестке дня. Далекой мечтой казался лозунг “догнать”. Все это прекрасно понимал такой высокообразованный человек, как А.И. Лурье. И не только понимал, но и прилагал усилия, чтобы исправить ситуацию. В результате на свет появился трехтомный курс: Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье “Теоретическая механика”, изданный в 1932-1933 годах. Первые два тома курса содержали обязательный для инженерного образования материал, а третий том включал более сложные методы аналитической механики с приложением к огромному количеству конкретных задач. В последующем, материал первых двух томов был принят в качестве обязательной программы для технических вузов. Все последующие издания курса выходили уже без третьего тома. Шестое и последнее издание этого курса вышло в 1983 году уже после кончины А.И. Лурье. Во многих отношениях указанный курс отличался новизной. Прежде всего, он, в отличие от западных аналогов, был ориентирован на технические приложения. Соответственно, ряд вопросов аналитической механики, которые только отпугнули бы инженеров-расчетчиков был опущен. Напротив, прикладные аспекты были существенно расширены. Дополнительную ясность курсу придавало широкое применение векторного исчисления, которое в то время почти не применялось. Единственной книгой по механике, известной в то время и использующей векторное исчисление, была небольшая книга Л. Зильберштейна (Silberstein L. Vectorial mechanics. London: Macmillan and Co., 1913.), которая совершенно не подходила для целей технического образования и, кроме того, использовала терминологию, не утвердившуюся в последующем. Курс Л.Г. Лойцянского и А.И. Лурье сыграл огромную роль в подготовке российских инженеров. Между прочим, теоретическая механика в то время была обязательным предметом во всех технических вузах России, и ей отводилось не менее 230 аудиторных часов. Именно этим, главным образом, и объяснялся высокий уровень подготовки российских инженеров. К сожалению, начиная с конца 60-х годов объем курсов по механике во многих технических вузах неуклонно снижается, что ведет к снижению и уровня выпускаемых инженеров. Поскольку техническое образование в России составляло основу всего высшего образования, то снижение уровня инженеров вело к снижению индекса интеллектуальности населения России в целом. Сравним всего две цифры, характеризующие индекс интеллектуальности населения России: 1960г. — второе место в мире, 1995г. — 54 место. Конечно, уменьшение роли механики в техническом образовании не является единственной причиной столь плачевного положения дел, но это — одна из главных причин. Здесь не место вдаваться в детальное обсуждение этого большого, и не только для России, вопроса, но это — непреложный факт.

Вернемся к обсуждению творчества А.И. Лурье. После написания курса по теоретической механике, научные интересы А.И. Лурье почти на 20 лет переключились на другие разделы механики, которые будут обсуждаться ниже. Впрочем, это не совсем

верно, т.к. А.И. Лурье все эти годы читал курсы лекций по различным разделам механики, включая курс по аналитической механике, для студентов физико-механического факультета и, естественно, продолжал размышлять над вопросами аналитической механики. Однако его публикации этих лет были посвящены другим проблемам. В начале 50-х годов, в связи с необходимостью расчетов движений искусственных спутников Земли и решения ряда других проблем, например, разработки гироскопических платформ, интересы А.И. Лурье вновь обратились к аналитической механике. В результате, в 1961 году на свет появилась фундаментальная монография “Аналитическая механика”. К этому времени Россия уже добилась огромных успехов в области образования. Развитие фундаментальной механики в России достигло уровня ведущих стран Запада. В некоторых разделах механики, например, в теории гироскопических систем, Россия заняла лидирующее положение. “Аналитическая механика” прекрасно подтверждает сказанное. В этой монографии не только представлены все основные методы аналитической механики, но и дано их существенное развитие. Монография в целом сохранила все отличительные особенности научного творчества А.И. Лурье, такие как ясность и лаконичность изложения в сочетании с высоким теоретическим уровнем и ярко выраженной прикладной направленностью. Синтез подобного рода удастся очень и очень немногим ученым. Каждому, кто столкнется с необходимостью рассмотреть какую-либо задачу механики систем с конечным числом степеней свободы, можно посоветовать для начала заглянуть в “Аналитическую механику”. Вполне вероятно, что он найдет в ней эту задачу или что-нибудь очень похожее. Во многих отношениях “Аналитическую механику” можно назвать энциклопедией или даже справочником. Однако, в отличие от энциклопедии-справочника, здесь все задачи рассмотрены с единых позиций при тщательной проработке всех деталей. При этом, разумеется, во многих из этих задач появляются новые элементы. Описать все эти новые элементы весьма затруднительно, но читатель без труда обнаружит их. Просто иллюстрации ради отметим описания относительного движения и особо выделим изложение кинематики твердых тел, несущих на себе вращающиеся роторы (гироскопы). Ниже ограничимся указанием только на те немногие¹ новые элементы, которые имеют теоретическое значение, т.е. вносят свой вклад в фундамент аналитической механики. Здесь, прежде всего, следует отметить описание поворотов твердого тела с помощью вектора конечного поворота. Сам по себе этот вектор был известен уже давно. Тем не менее, даже в современных учебниках физики и ряде современных статей по механике отрицается возможность описания поворотов с помощью вектора. Связано это обстоятельство с неправильным использованием понятия суперпозиции поворотов. В “Аналитической механике” разработан детальный аппарат, позволяющий эффективно использовать вектор конечного поворота. В частности, для суперпозиции поворотов установлена теорема, позволяющая вычислить вектор суммарного поворота через векторы поворота составляющих поворотов. Найдено правило перестановочности векторов конечного поворота. Установлена формула, связывающая вектор угловой скорости с производной от вектора конечного поворота. Дана формулировка задачи Дарбу, т.е. задачи нахождения поворотов по вектору угловой скорости, в терминах вектора конечного поворота. Установлены формулы, связывающие вектор конечного поворота с параметрами Родрига-Гамильтона и Кейли-Клейна. Важность этих резуль-

¹много новых элементов такого рода в механике предложить почти невозможно

татов в том, что они, в принципе, не могут устареть, т.е. они вошли в механику навсегда. Еще один фундаментальный результат состоит в следующем. В конце прошлого века Рэлей ввел понятие диссипативной функции, как квадратичной формы скоростей. Эта функция оказалась очень полезной при анализе неконсервативных систем. К сожалению, диссипативная функция Рэля была определена только для одного класса сил трения, а именно для линейного вязкого трения. В “Аналитической механике” понятие диссипативной функции обобщено на случай произвольной зависимости сил трения от скорости. В книге приведены диссипативные функции для различных законов трения. В частности, построена диссипативная функция для закона трения Кулона. В настоящее время эта функция широко используется при решении задач динамики систем с Кулоновым трением.

5 Теория тонких упругих оболочек

Значительное число работ А.И. Лурье посвящено теории тонких стержней, пластин и оболочек. В данном разделе мы ограничимся обсуждением работ по теории оболочек. Последняя является одним из актуальнейших разделов механики. Это определяется следующими обстоятельствами. Во-первых, тонкостенные конструкции находят широчайшее применение в технике и строительстве. Впрочем, и в биологических системах тонкостенные элементы, например, биологические мембраны, используются Природой очень широко. Во-вторых, в теории оболочек в явном виде развивается более общая, нежели ньютоновская, механика. В области теории оболочек А.И. Лурье активно работал более 25 лет. Его первая работа “Исследования по теории упругих оболочек” (Труды Ленинградского индустриального института, №6, сс. 37–52) вышла в 1937 году, а последняя — “О статико-геометрической аналогии теории оболочек” — опубликована в 1961 году. Всего по теории оболочек А.И. Лурье опубликовал пять больших статей и одну монографию. Важную роль в расчетной практике сыграла монография А.И. Лурье “Статика тонкостенных упругих оболочек”, Гостехиздат, 1947, 252с. Это была первая специализированная монография по теории оболочек российского автора. Следует отметить, что теория оболочек была одним из первых² разделов механики твердого деформируемого тела, в котором постреволюционная Россия уже к 1940 году не только достигла уровня развитых стран Запада, но и значительно опередила их. В этом успехе роль А.И. Лурье трудно переоценить, но, конечно, значительны достижения и других российских авторов, среди которых нельзя не отметить А.Л. Гольденвейзера и В.В. Новожилова. В первой из цитированных выше работ А.И. Лурье пишет: “По сравнению с тем, весьма трудно понимаемым, изложением этого вопроса, которое дано в главе XXIV известного сочинения Лява³, мы, применяя язык векторных обозначений, достигли существенных упрощений всех выводов”. Подчеркнем, что в этой работе, как и вообще во всех своих работах, А.И. Лурье использует наиболее современные версии соответствующих разделов математики. В данном случае речь шла о геометрии поверхностей. В обсуждаемой работе А.И. Лурье приводит строгую теорию малых деформаций поверхностей достаточно

²Среди других разделов, в которых приоритет России неоспорим нужно указать метод Колосова-Мусхелишвили в плоской задаче теории упругости

³Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935

общего вида. В то же время, при выводе уравнений равновесия в перемещениях, А.И. Лурье использует в несколько улучшенном виде, но все-равно ограниченную, идею, предложенную Б.Г. Галеркиным двумя годами раньше. В работе “Общая теория упругих тонких оболочек” (ПММ, 1940, т.IV, вып.2, сс. 7–34) А.И. Лурье уже снимает все ограничения и дает полную теорию оболочек, основанную на гипотезах Кирхгофа-Лява, в тензорном изложении. Даже в настоящее время эту теорию А.И. Лурье улучшить невозможно, если не отказываться от гипотез Кирхгофа-Лява. Весьма показательной для всего творчества А.И. Лурье является монография “Статика тонкостенных упругих оболочек”. В своих работах А.И. Лурье никогда не забывал, для кого он пишет свой труд. В данном случае речь шла о многочисленном отряде инженеров, работающих в разного рода конструкторских и расчетных бюро. По этой причине тензорные методы в монографии не применяются. Изложение ведется максимально просто, но достаточно строго, и ограничено наиболее употребительными классами оболочек, главным образом, оболочками вращения. Приводится большое число решенных задач, доведенных до легко применяемых на практике расчетных формул. Известно, что уравнения теории оболочек весьма громоздки, а их решения имеют трудно обозримый вид и мало пригодны для инженерных расчетов. Поэтому А.И. Лурье отказался от представления точных решений, которые к тому же не имеют особого смысла из-за приближенности самой теории оболочек, и существенно использовал асимптотические методы. В результате, ему удалось получить расчетные формулы в компактной и легко используемой в приложениях форме. Указанные особенности монографии превратили ее в настольную книгу инженера-расчетчика сразу после ее публикации. Было бы ошибкой думать, что обсуждаемая монография имеет сугубо прикладное значение. Представленные в книге результаты относятся к важнейшим достижениям теоретической мысли. Действительно, теория оболочек вызвана к жизни неотложными практическими потребностями. Поэтому было бы бессмысленно писать громоздкие уравнения и еще более громоздкие решения, которые нередко появлялись в начале XX-го века и не находили себе применения. От этой печальной участи теорию оболочек как раз и спасала монография А.И. Лурье. Полученные в монографии асимптотические формулы были результатом достаточно строгого математического анализа. При этом надо иметь в виду, что теория дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных еще не была разработана. Она появилась спустя десять лет и выросла именно из задач теории оболочек. Среди конкретных результатов, полученных в обсуждаемой монографии, следует выделить задачу о концентрации напряжений вблизи отверстия на поверхности цилиндрической оболочки. Известна классическая задача Кирша о концентрации напряжений вблизи отверстия в растягиваемой плоскости. Задача, решенная А.И. Лурье, является далеко идущим обобщением задачи Кирша. Впоследствии из этой задачи вырос большой раздел теории оболочек. Не останавливаясь на других результатах А.И. Лурье, отмечаем, что все шесть его работ по теории оболочек стали классическими и вошли неотъемлемой частью в современную теорию оболочек.

6 Пространственные задачи линейной и нелинейной теории упругости

Пространственным задачам теории упругости А.И. Лурье посвятил большое количество своих научных работ, среди которых необходимо выделить три монографии: 1. Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1955, 491с.; 2. Теория упругости, Наука, 1970, 939с.; 3. Нелинейная теория упругости, Наука, 1980, 512с. Все три монографии посвящены одному и тому же разделу механики. Тем не менее, они практически не пересекаются по содержанию. В первой монографии рассматриваются строгие решения задач статики упругого тела. Главное внимание уделено рассмотрению задач для упругого слоя. Именно в этой монографии А.И. Лурье предложил новый метод, ставший широко известным под названием символического метода А.И. Лурье. Этот метод является далеко идущим обобщением операционных методов, но имеет и существенные отличия. Существо метода продемонстрируем на примере задачи для упругого слоя. Выпишем статические уравнения Ламе для слоя $|z| \leq h$

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}(x, y, z) + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{0}, \quad |z| < h, \quad x, y \in \Omega, \quad (1)$$

где \mathbf{u} есть вектор перемещений и для простоты опущены объемные силы. Набла-оператор представим в виде

$$\nabla = \mathbf{k} \frac{d}{dz} + \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{i} \frac{d}{dx} + \mathbf{j} \frac{d}{dy}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Lambda} = 0. \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), переписываем его в виде

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{k}\mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} (\mathbf{k}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{k}) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dz} + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Если в этом уравнении оператор $\mathbf{\Lambda}$ рассматривать, как независимый от переменной z вектор, то (3) можно считать обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Добавим к уравнению (3) “начальные” условия

$$z = 0: \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(x, y), \quad \frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{g}(x, y). \quad (4)$$

Мы получили задачу Коши (3)–(4), в которой переменные x, y считаются параметрами. Частные решения этой задачи ищутся в виде

$$\mathbf{u} = \exp(i\lambda z) \mathbf{a}(x, y). \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (4), получаем однородную систему уравнений для вектора \mathbf{a}

$$\left[-\lambda^2 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{k}\mathbf{k} \right) + \frac{i\lambda}{1-2\nu} (\mathbf{k}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{k}) + (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}) \mathbf{E} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda} \right] \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Нетривиальные решения (6) существуют, если определитель тензора \mathbf{A} , т.е. выражения, стоящего в квадратных скобках уравнения (6), равен нулю. Вычисляя определитель, получаем уравнение для определения характеристических чисел λ .

$$\det \mathbf{A} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} (\lambda^2 - D^2)^3 = 0, \quad D^2 = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Корни этого уравнения дают два значения $\lambda = \pm D$ кратности три для характеристического числа. После ряда понятных вычислений, решение задачи Коши (3)–(4) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}(z, zD) \cdot \mathbf{f}(x, y) + \mathbf{Q}(z, zD) \cdot \mathbf{g}(x, y). \quad (8)$$

Тензоры \mathbf{P} и \mathbf{Q} следует рассматривать, как дифференциальные операторы бесконечного порядка. Они являются аналитическими функциями операторов D^2 , $D \sin zD$, $\cos zD$. Для того, чтобы выписать эти тензоры-операторы в явном виде, необходимо заменить их представлениями через степенные ряды, в которые войдут только целые степени оператора D^2 , т.е. двумерного оператора Лапласа. Осталось получить уравнения для нахождения функций \mathbf{f} и \mathbf{g} . Для этого служат краевые условия при $z = \pm h$. В итоге мы приходим к двум векторным уравнениям с двумерными дифференциальными операторами бесконечного порядка. Заметим, что ряды, задающие эти операторы очень быстро сходятся. Поэтому в этих рядах, как правило, можно ограничиться небольшим числом членов. Например, если ограничиться только одним главным членом, то получим уравнения классической теории пластин Кирхгофа. Следующее приближение дает теорию пластин с учетом деформации поперечного сдвига. В дальнейшие подробности мы вдаваться не будем. Подчеркнем только, что описанный символический метод допускает совершенно строгое обоснование. Не представляет особого труда обобщить этот метод на динамический случай, что и было сделано. Символический метод А.И. Лурье получил очень широкое распространение в теории толстых плит и использовался многими авторами. Особенно эффективным символический метод А.И. Лурье оказывается в сочетании с методом однородных решений, в развитие которого А.И. Лурье так же внес значительный вклад.

Монография “Теория упругости”, объемом около 60 печатных листов, по своей фундаментальности и охвату материала по статическим задачам теории упругости не имеет себе равных в мировой литературе. Динамические задачи и волны в упругих средах в ней не рассматриваются. Этого не делается не только из-за неизбежного и непомерного увеличения объема книги, но, главным образом, в силу того, что динамические задачи по своей физической и математической природе существенно отличны от статических, и их включение нарушило бы целостность изложения. Следует ясно сознавать, что Россия конца 60-х годов в научном отношении находилась на несравнимо более высоком уровне, нежели в 1925 году. Уже существовали и превосходные учебники по всем разделам механики, и научные монографии не уступающие, а нередко и превосходящие по своему уровню, западным аналогам. Жизнь изменилась, и, в частности, существенно повысился теоретический уровень подготовки инженеров. Появилась новая разновидность инженеров, называемых инженерами-исследователями. В деятельности последних получение практических результатов сопровождалось достаточно глубокими теоретическими исследованиями. Все это прекрасно понимал А.И. Лурье, когда приступал к работе над монографией “Теория

упругости”. Задача заключалась в том, чтобы с единых позиций дать полное изложение предмета, включая все важнейшие достижения XIX–XX веков в данной области. Естественно, решение поставленной задачи требовало изложения классических результатов на современном языке. Иными словами, требовалась глубокая переработка огромного материала. При этом, разумеется, менялась, иногда весьма существенно, технология получения классических результатов. В настоящее время уже можно констатировать, что монография “Теория упругости” вполне соответствует своему назначению. Если кто-либо желает получить первоклассную теоретическую подготовку по статическим проблемам теории упругости, то изучение им “Теории упругости” есть кратчайший, хотя и не слишком легкий, путь к цели. Это безусловно верно в отношении линейной теории упругости. Что касается раздела, посвященного нелинейным задачам теории упругости, то сам А.И. Лурье был не вполне доволен достигнутым⁴. Неудовлетворенность А.И. Лурье изложением нелинейных проблем в “Теории упругости” легко объяснима. Как известно, центральной проблемой нелинейной теории упругости является формулировка определяющих уравнений. В линейной теории упругости задание определяющего уравнения сводится по предложению Коши к написанию линейной связи общего вида между тензором напряжений и тензором деформации. При этом существование упругого потенциала гарантировано. Единственный вопрос возникает при наложении на упругий потенциал требования быть положительно определенным. Для изотропного материала указанное требование сводится к выполнению неравенств

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad (9)$$

где λ и μ — суть постоянные Ламе. Являются ли ограничения (9) необходимыми? Общие законы термодинамики не требуют, чтобы условия (9) выполнялись. Не требуется этого и с формально-математической точки зрения. Действительно, существование и единственность решений уравнений линейной теории упругости обеспечено условиями сильной эллиптичности в статике или, что то же самое, условиями строгой гиперболичности в динамике. Эти условия приводят к необходимости выполнения неравенств

$$\mu > 0, \quad \lambda + 2\mu > 0, \quad (10)$$

которые являются более слабыми, нежели условия (9). В линейной теории упругости выбор между неравенствами (9) и (10) осуществляется на основе следующего физического принципа: при любом виде деформирования материала из натурального состояния его внутренняя энергия или, что то же самое, его упругий потенциал должны возрасти. Сформулированный принцип утвердился в механике упругого тела в виде понятия устойчивости материала. Легко убедиться, что материал, для которого неравенства (10) выполнены при нарушении неравенств (9) не может продолжительно существовать и самораспадется при действии сколь угодно малых нагрузок. В нелинейной теории упругости ситуация несравнимо сложнее. Во-первых, не для всякой зависимости тензора напряжений с тензором конечных деформаций существует упругий потенциал. Поэтому стало необходимым различать упругие и гиперупругие⁵ материалы. Во-вторых, единственность решения статической задачи

⁴Между прочим, многие люди говорили автору данного сообщения, что при первом знакомстве с нелинейной теорией упругости изложение этого вопроса в “Теории упругости” им нравится гораздо больше, нежели в намного более полной монографии “Нелинейная теория упругости”.

⁵Для последних, в отличие от первых, упругий потенциал существует.

теории упругости не только отсутствует, но и обязана отсутствовать. В-третьих, при больших деформациях упругий потенциал совсем не обязан возрастать с ростом деформации и т.д. Короче говоря, сложилась ситуация, при которой всем понятно, что упругий потенциал нельзя задавать произвольным образом и, в то же самое время, никто не знает какие именно ограничения и почему необходимо накладывать на упругий потенциал. По предложению К. Трусделла описанную ситуацию стали называть главной нерешенной проблемой нелинейной теории упругости⁶. К моменту выхода в свет монографии “Теория упругости”, указанная проблема начала обретать особую остроту. Стал формироваться новый раздел нелинейной теории упругости, который получил название дополнительных неравенств в теории упругости. В 70-е годы был предложен целый ряд таких неравенств и начался процесс анализа того, что произойдет, если те или иные неравенства будут нарушены. Задачи, в которых нарушаются, например, условия сильной эллиптичности, получили название сингулярных задач механики сплошных сред. Разумеется, А.И. Лурье не мог оставаться в стороне от этих бурно обсуждаемых вопросов. Однако в “Теории упругости” все эти вопросы не нашли, да и не могли найти, никакого освещения. Вот почему, практически сразу после опубликования “Теории упругости” А.И. Лурье приступил к работе над новой книгой “Нелинейная теория упругости”, которая вышла в свет через шесть месяцев после его кончины. Процесс написания книги был весьма продолжительным, поскольку здесь дело состояло не только в подготовке материала к публикации, но и в поисковой, исследовательской работе на переднем фронте механики сплошных сред. Как всегда, А.И. Лурье детально изучил все последние достижения западных ученых. Например, он изучил репринтное издание (1968г.) лекций К. Трусделла и предложил их для перевода на русский язык. Этот перевод вышел под его редакцией под названием “Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред” в 1975 году. В процессе перевода велась активная переписка с К. Трусделлом, который, в результате, прислал много добавлений и исправлений к исходному тексту. Поэтому русский перевод книги заметно отличался от оригинала. К работе над описываемыми проблемами А.И. Лурье привлек своего ученика Е.Л. Гурвича, совместно с которым они опубликовали важную в теоретическом отношении статью “К теории распространения волн в нелинейно упругой среде (эффективная проверка условия Адамара)”, Изв. АН СССР, МТТ, 1980, №6, сс.110–116. И этой статьи в опубликованном варианте А.И. Лурье увидеть было не суждено. Как видим, до конца своей жизни, несмотря на болезнь, которая после 1976г. протекала в тяжелой форме, А.И. Лурье не прекращал активной научной работы. Сам процесс создания книги “Нелинейная теория упругости” нельзя рассматривать иначе, как научный подвиг. Следует подчеркнуть, что вся книга от первой и до последней строчки была написана рукой А.И. Лурье. Тем не менее, только очень вдумчивый читатель обнаружит в ней следы тяжелой болезни в форме некоторой поспешности. А.И. Лурье хорошо знал, что дни его сочтены, и он боялся не успеть завершить десятилетний труд, которому придавал большое значение. Если говорить о книге в целом, то она, как и все книги А.И. Лурье, содержит обстоятельное изложение предмета в прямой тензорной записи, которая существенно облегчает восприятие материала. Последовательно вводятся все,

⁶К слову сказать, она не решена и в настоящее время, причем не видно ясных путей к ее решению. Видимо, единственным необходимым ограничением является условие Лежандра-Адамара, но и его можно использовать только “кусочно”.

используемые в настоящее время, меры деформации и тензоры напряжений. В отличие от линейной теории, в нелинейной теории их несколько, и их необходимо строго различать. Основное внимание, естественно, уделяется теории определяющих уравнений и формулировке ограничений, налагаемых на эти уравнения и, в частности, на задание упругого потенциала. Подробно рассматриваются задачи для сжимаемых и несжимаемых материалов. К последним относится такой важный нелинейно упругий материал, как резина. Формулируются вариационные принципы нелинейной теории упругости. В частности, излагается принцип дополнительной работы, доказанный его учеником Л.М. Зубовым и вызвавший оживленную дискуссию в западных работах. Значительное внимание в книге уделено такому важному разделу нелинейной теории упругости, как наложение малой деформации на конечную. Важность этого раздела определяется тем, в механике сплошных сред, в отличие от механики систем с конечным числом степеней свободы, наложение малых деформаций на конечную является единственным методом, позволяющим исследовать проблему устойчивости, об огромной практической важности которой можно и не говорить. Заканчивается книга изложением основных фактов термодинамики нелинейно упругой среды.

7 Заключение

Даже из приведенного и весьма беглого обзора работ А.И. Лурье по механике деформируемого твердого тела и аналитической механике, мы видим насколько огромен его вклад в развитие механики. При этом в обзоре совершенно не обсуждаются работы А.И. Лурье по теории управления, где ему принадлежат результаты, пользующиеся мировой известностью. Говоря о вкладе А.И. Лурье в развитие механики в России, нельзя не упоминать созданную им школу, к которой принадлежат сотни учеников, работающих в разных областях механики. Они продолжают его дело. Автору данных строк выпала огромная честь не только быть прямым учеником А.И. Лурье, но и провести много часов в совместной работе за его рабочим столом. Более всего поражали в А.И. Лурье его выдающиеся человеческие качества, его абсолютная научная и человеческая честность, его доброе и отзывчивое отношение ко всем окружающим его людям. Нужно было видеть каким неподдельным интересом и любопытством загорались его глаза при обсуждении полученных кем-либо новых научных результатов. При этом он очень быстро и точно отличал действительно новый результат от известного, но облеченного в новые одежды.

Имя А.И. Лурье навсегда вошло в историю российской механики.

Основные уравнения теории неупругих сред*

Аннотация

В настоящее время построение теории нелинейно-упругих сред практически завершено, а основные проблемы связаны с неупругими материалами. В работе приводятся хорошо известные экспериментальные факты, которые, тем не менее, не описывает ни одна из существующих теорий пластичности. Целью данной работы является попытка построения такой теории неупругих материалов, которая, по крайней мере, качественно описывала бы основные экспериментальные факты. Отсюда и требования к исходным посылкам теории: они должны быть непротиворечивыми в логическом отношении, достаточно строгими в математическом оформлении и не вступать в качественное противоречие с уже известными экспериментальными фактами. Новизна предлагаемой теории в сравнении с известными версиями заключается в следующем. Используется пространственное описание. Дается строгое определение материальной производной и на его основе строится кинематика сред с вращательными степенями свободы. Фундаментальные законы формулируются для открытых систем. Дается новая трактовка второго закона термодинамики, причем температура и энтропия вводятся посредством чисто механических аргументов. Общие построения приводятся для моментной среды. Сухое трение между частицами среды вводится через антисимметричную часть тензора силовых напряжений. Свободная энергия задается в форме, одновременно пригодной для газообразных, жидких и твердых тел. Уравнения состояния такого рода ранее, видимо, не встречались. При этом фазовые переходы в среде описываются без привлечения каких-либо дополнительных условий.

1 Введение. Механика сплошных сред

1.1 Рациональная и экспериментальная механика

Механика сплошных сред является объектом пристального внимания исследователей в течение нескольких столетий. Именно в этой области знания зародился анализ, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление и многое другое. Первое дифференциальное уравнение в истории науки было установлено Я. Бернулли

*Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Труды XXVIII летней школы "Актуальные проблемы механики", Санкт-Петербург, 2001. С. 14–58.

(1694) при изучении равновесия гибких нитей. Оно имеет вид

$$\mathbf{T}'(s) + \rho \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Уравнение поперечных колебаний струны (Ж.Даламбер, 1749)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

и уравнения движения идеальной жидкости (Л. Эйлер, 1755), которые приведены в следующем пункте, явились первыми примерами уравнений с частными производными. С этого времени началось интенсивное исследование поведения твердых деформируемых тел при воздействии на них внешней нагрузкой, а также изучение динамических проблем. Сначала это были тонкие упругие стержни. В 1771 году Л. Эйлер впервые вывел уравнения равновесия тонких стержней

$$\mathbf{T}'(s) + \rho \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}'(s) + \mathbf{R}'(s) \times \mathbf{T}(s) + \rho \mathbf{L}(s) = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

независящие от частных свойств материала. Линейная теория упругости была построена О. Коши (1822) и остается неизменной вплоть до наших дней. История ее создания весьма показательна. В 1821 году О. Коши был рецензентом работы А. Навье, в которой на основе корпускулярных представлений впервые были выведены уравнения линейной теории упругости с одной упругой постоянной. Коши отнесся к этой работе весьма критически, в результате чего работа Навье была опубликована только в 1827 году. Для построения теории упругости Коши выбирает другой подход, ставший основным в механике твердых деформируемых тел. Он вводит понятие упругого континуума, строит теорию напряжений и деформации для этого континуума, постулирует линейную зависимость тензора напряжений от тензора деформаций и выводит уравнения равновесия. Результирующая система уравнений Коши

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S, \quad (1.4)$$

где тензор четвертого ранга \mathbf{C} называется тензором упругости. Построение линейной теории упругости было выполнено О. Коши за считанные месяцы. После чего в течение следующих 15 лет, вплоть до 1837 года, Коши пытался улучшить построения А. Навье. Этой же проблеме вывода уравнений теории упругости из корпускулярных представлений были посвящены многолетние исследования С.Д. Пуассона. Результаты оказались мало удовлетворительными. Указанное обстоятельство весьма наглядно демонстрирует силу методов механики сплошных сред. Между тем, единственное важное дополнение к теории Коши было сделано Дж. Грином (1839), которое состояло во введении понятия энергии деформации \mathcal{U} и постулировании уравнения баланса энергии. Так были получены соотношения Коши–Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{C} = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2}. \quad (1.5)$$

Все сказанное выше хорошо известно и преследовало цель подчеркнуть важный для целей данной работы факт. А именно, со времени вывода уравнений (1.1) — (1.5) прошел огромный промежуток времени, в течение которого наши представления о

природе сущего радикально изменились. Тем не менее, указанные уравнения сохранили свой вид без каких-либо, даже самых минимальных, изменений. **Способность механики сплошных сред строить уравнения, истинность которых не опровергается временем и которые не требуют уточнений, является ее важнейшим достоинством.** Последующее развитие механики дополнило, но не изменило, эти уравнения. Здесь уместно обсудить еще один важный исторический факт. После вывода уравнения (1.1) Я. Бернулли, вплоть до своей смерти в 1705 году, безуспешно пытался вывести уравнение изгиба стержня, т.е. второе уравнение в системе (1.3). Эта задача, как бы по наследству, перешла к Л. Эйлеру. Сверхгению Эйлера понадобилось почти столетие, чтобы выяснить истинную причину неудачи гениального Я. Бернулли. А именно, в 1771 году Л. Эйлер окончательно установил, что ньютоновская механика принципиально неполна. Заметим, что ньютоновская механика — это механика трансляционных движений, управление которыми осуществляется силами. Но в Природе существует еще один тип движения (спинорное движение), которое не сводится к трансляционному. Соответственно, наряду с силами, в механике необходимо рассматривать еще один тип воздействий, а именно моменты, которые в общем случае не сводятся к понятию момента силы. Поэтому **в механике, помимо уравнения баланса сил, необходимо постулировать еще один закон — уравнение баланса моментов.** Собственно, этот закон был открыт еще Архимедом в форме принципа рычага. Известно множество попыток доказать принцип рычага на основе уравнения баланса сил. Видимо, последняя попытка такого рода была предпринята Лагранжем уже после смерти Эйлера. Лагранж полагал, что ему удалось доказать принцип рычага. Отсюда следовало, что уравнение баланса моментов может быть доказано в ньютоновской механике. Поэтому нет нужды выдвигать дополнительный постулат. Эта ошибка Лагранжа задержала развитие механики, по крайней мере, на столетие и вызвала глубокие негативные последствия в современной теоретической физике. Возвращаясь к Л. Эйлеру, отмечаем, что в не вполне осознанной форме Эйлер использовал уравнение баланса моментов еще раньше, при выводе уравнений динамики твердого тела. Примерно так же поступали многие исследователи при использовании принципа рычага, в правильности которого, разумеется, никто не сомневался. Однако в теории стержней подобный прием не срабатывал. Напомним, что в то время теория напряжений в трехмерных средах еще не существовала. Стержень рассматривался, как упругая линия, лишенная толщины. Поэтому ввести момент \mathbf{M} как момент силы было невозможно, и его пришлось ввести как самостоятельную сущность. В 1776 году Л. Эйлер дает окончательную формулировку фундаментальных законов механики в виде двух независимых постулатов: законов динамики Эйлера. Только в начале XX-го века спинорные движения вновь получили признание, а эйлерова механика стала интенсивно развиваться только в последние 50 лет. XIX-й век отметился формулировкой еще двух фундаментальных законов, получивших названия первого и второго законов термодинамики. Первый закон термодинамики или уравнение баланса энергии был сформулирован Дж. Грином в 1839 году и уже упоминался выше. Второй закон термодинамики или неравенство производства энтропии рождался в великих муках, имел множество формулировок и, наконец, утвердился в механике сплошных сред в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема-Трусделла. **Два закона динамики Эйлера и два начала термодинамики составили каркас, внутри которого и строится современная механика сплошных сред.** Важно подчеркнуть, что упомянутый каркас

не определяет конкретных моделей сплошных сред, поскольку дает незамкнутую систему уравнений. Создание модели сплошной среды равносильно решению проблемы замыкания указанной выше системы уравнений. Иными словами, создание модели сплошной среды равносильно написанию неких дополнительных уравнений, которые принято называть определяющими и которые устанавливают связи между основными переменными, входящими в фундаментальные законы. Долгое время считалось, что установление определяющих уравнений является задачей экспериментальной механики. Это правильно в том смысле, что эксперимент является неустранимым звеном при построении определяющих уравнений конкретных материалов. Тем не менее, в настоящее время уже ясно, что построение определяющих уравнений является теоретической проблемой, которая принципиально не может быть решена методами экспериментальной механики. К обсуждению этого вопроса мы еще неоднократно будем обращаться в дальнейшем тексте статьи. В настоящее время проблема замыкания удовлетворительно решена только для так называемых нелинейно упругих сред, а теория нелинейно упругих сред обрела практически каноническую форму. Существуют материалы, которые удивительно хорошо моделируются нелинейно упругой средой в достаточно широком интервале деформаций. Однако этот класс материалов весьма узок. Большинство реальных материалов, хотя и проявляют свойство упругости, но демонстрируют явное отклонение от того, что принято называть упругостью. Поэтому основные проблемы механики деформируемых тел в настоящее время сконцентрированы в области неупругого поведения материалов. Несмотря на то, что здесь накоплен огромный экспериментальный материал и опубликованы тысячи теоретических работ, тем не менее итоговые достижения в этой области оставляют желать много лучшего. Об этом свидетельствуют, в частности, и постоянно появляющиеся новые публикации, содержащие попытки улучшить основы существующих теорий. Ничего подобного не наблюдается в нелинейной теории упругости, где усилия исследователей направлены исключительно на решение конкретных проблем, не меняющих основ теории, но углубляющих и расширяющих результативную часть теории. В чем же состоит главная причина столь разительных отличий между двумя родственными теориями? По мнению автора, основная причина заключается в том, что в теории неупругих материалов телега поставлена впереди лошади. А именно, в нелинейной теории упругости ведущая роль принадлежит сугубо теоретической идее гладкого дифференцируемого многообразия. Эта идея принципиально не может вытекать из эксперимента. Иными словами, сначала лошадь (теоретическая идея и ее реализации), а затем телега с добром (конкретными результатами, уточняющимися и проверяющимися экспериментом). В теории неупругих материалов теоретические модели пытаются вывести из экспериментальных фактов. При этом отсутствует общая теоретическая концепция. Известно, например, что при достаточно больших напряжениях всякий материал обретает свойство текучести, и это свойство закладывается в определение теоретической модели в виде критерия текучести. Но что является причиной текучести и что, собственно, называется текучестью, не обсуждается. Не обсуждается также и определение исходного объекта: от модели сплошной среды в виде гладкого дифференцируемого многообразия приходится отказываться, но никакой замены этому не предлагается. Между тем, ***отказ от идеи гладкого дифференцируемого многообразия по необходимости влечет за собой отказ от традиционного понимания концепции определяющих уравнений***, чего в существующих теориях упруго-пластических мате-

риалов не происходит. Напротив, именно на определяющие уравнения в их традиционной трактовке возлагается вся ответственность за основные свойства предлагаемых к рассмотрению теорий.

1.2 Гидромеханика

Если не обсуждать теорию тонких стержней, то первой моделью сплошной среды была так называемая идеальная жидкость, уравнения для которой были предложены Л. Эйлером в 1755 году. В обозначениях, принятых в основном тексте статьи, уравнения динамики жидкости сводятся к следующей системе уравнений [1]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad -\nabla p + \rho \mathbf{F} = \rho m \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right). \quad (1.6)$$

Эта система четырех уравнений содержит пять неизвестных. Для ее замыкания необходимо принять определяющее уравнение, связывающее давление p с плотностью ρ . Известны различные определяющие уравнения для жидкости. Для иллюстрации приведем уравнение, которое в литературе не используется, но, возможно, лучше отражает поведение “идеальной” жидкости

$$p = p(\rho) = p_0(\zeta^{-m} - \zeta^{-n}), \quad \zeta \equiv \rho_0/\rho, \quad m > n. \quad (1.7)$$

Здесь p_0 , m , n , ρ_0 суть характеристики жидкости, определяемые экспериментально. Важным свойством любого определяющего уравнения должна быть конечная прочность жидкости на разрыв, причем для жидкости она весьма мала. В качестве примера задания граничных условий рассмотрим простейшую ситуацию. Пусть жидкость занимает цилиндрическую область $0 \leq r \leq R$. Граница $r = R$ моделируется силовым полем¹ вида

$$\mathbf{F} = -F_0 \left[\left(\frac{R-r}{l} \right)^{-p} - \left(\frac{R-r}{l} \right)^{-q} \right] \mathbf{e}_r, \quad l \ll R, \quad p > q. \quad (1.8)$$

Как видим, граничные условия моделируются заданием массовых сил, причем на единицу объема действует сила $\rho \mathbf{F}$. Следует подчеркнуть, что при правильном задании определяющего уравнения, например в форме (1.7), эта система способна описать большинство известных экспериментальных фактов. Правда, в некоторых случаях необходимо дополнительно учитывать термомеханические эффекты. Разумеется, при анализе системы (1.6)–(1.7) необходимо учитывать наличие у нее разрывных решений. Следует иметь в виду, что внешняя простота системы (1.6)–(1.7) обманчива, и ее решение наталкивается в нетривиальных случаях на значительные математические трудности. Чрезвычайно популярная модель жидкости Навье–Стокса², хотя и приводит к осмысленным практическим результатам, неприемлема с фундаментальной точки зрения. Известный факт прилипания жидкости к стенкам канала объясняется отнюдь не вязкостью жидкости в общепринятом понимании, а взаимодействием жидкости со стенками канала. Указанное взаимодействие описывается силовым полем,

¹Эта идея принадлежит ученику и коллеге автора А.М. Кривцову, который с успехом применяет ее в задачах молекулярной динамики.

²Простота модели Навье–Стокса связана с тем, что в ней отсутствуют разрывные решения.

задаваемым потенциалом типа Леннарда–Джонса. Этим же взаимодействием объясняются и капиллярные явления. Существенно изменить описание жидкости можно только учетом, в дополнение к трансляционным движениям, независимых спинорных движений (вращательных степеней свободы), которые впервые были введены в механику Л. Эйлером [2].

1.3 Нелинейная теория упругости

Следующей трехмерной теорией сплошной среды, разработанной в механике, была линейная, а позднее и нелинейная, теория упругости. Нет нужды давать здесь исторические ссылки. Существуют полные обзоры по данной теме, например [3]. Здесь мы коснемся только тех аспектов теории, которые имеют непосредственное отношение к обсуждаемым вопросам. При известных условиях, среда может вести себя так, что частицы среды, которые были близки до деформации, остаются близкими в процессе деформации. Такое поведение среды можно назвать упругим. С формальной точки зрения, упругую среду можно отождествить с гладким дифференцируемым многообразием и использовать так называемое материальное или лагранжево описание среды. В такой среде можно ввести понятия материальных линий, поверхностей и объемов, которые в процессе деформирования состоят из одних и тех же частиц. Эти понятия нельзя ввести для идеальной жидкости или для неупругой среды. Поэтому в гидромеханике используется пространственное или эйлерово описание, при котором в данной точке системы отсчета задаются две функции $p(\mathbf{x}, t)$ и $\rho(\mathbf{x}, t)$, которые не связаны с конкретными частицами жидкости. Чисто пространственное описание твердых деформируемых тел в литературе³, видимо, не разработано. Основное различие материального и пространственного описаний проявляется в трактовке определяющих уравнений. Подробнее речь об этом пойдет ниже. Если ограничиться рассмотрением упругих тел, то материального описания вполне достаточно для полного анализа поведения нелинейно упругого тела. К настоящему времени, нелинейная теория упругости уже обрела каноническую форму. Все, что необходимо сделать для возможности решения конкретных задач — это задать вид энергии деформации (внутренней энергии, свободной энергии). С чисто теоретической точки зрения здесь не существует никаких проблем. Энергию деформации можно задавать произвольно. Однако энергия деформации материалов, способных устойчиво существовать достаточно продолжительное время, должна удовлетворять неким условиям, известным под названием дополнительных неравенств в теории упругости [4, 5]. При материальном описании, наиболее важным из условий такого рода является условие сильной эллиптичности в статике или условие строгой гиперболичности в динамике упругих тел. Это условие обеспечивает корректность возникающих краевых задач. Впрочем, условие сильной эллиптичности оказывается недостаточным, чтобы обеспечить существование устойчивых, т.е. ограниченных во времени, решений у корректно поставленных задач. В качестве иллюстрации важности условия сильной эллиптичности можно указать следующий факт: если это условие нарушено, то статическая задача нелинейной теории упругости имеет несчетное множество решений. Энергия деформации реальных тел заведомо не может удовлетворять условиям сильной эллиптичности для любых де-

³Описание, используемое, например, в [10, 11] и называемое эйлеровым, на самом деле является материальным (лагранжевым), в котором в качестве отсчетной выбирается актуальная конфигурация.

формаций, поскольку это означало бы существование неразрушимых тел. Фактически всякие проявления пластических свойств у твердых тел связаны с нарушением условий сильной эллиптичности, но об этом речь пойдет немного ниже.

Общая схема построения нелинейной теории упругости включает в себя три этапа, причем среда (упругий континуум) рассматривается как гладкое дифференцируемое многообразие. Первый: разработка теории напряжений и вывод уравнений движения, не зависящих от свойств среды. На втором этапе рассматривается чисто геометрическая теория деформирования многообразий и вводятся меры деформации. На этом этапе свойства среды также не имеют значения. Важно только, чтобы среду можно было бы считать гладким многообразием. Наконец, на третьем этапе напряжения связываются с деформациями посредством так называемых определяющих уравнений. Именно последние фиксируют физические свойства рассматриваемой среды.

Описанная схема впервые была введена Л. Эйлером при построении теории тонких стержней, а в 1822 году была распространена на трехмерные среды и существенно развита О. Коши. С тех пор она фактически остается неизменной. Более того, считается, что указанный подход сохраняет свою силу не только для упругих сред, но справедлив и при больших неупругих деформациях. Между тем, описанная схема имеет ограниченную область применимости даже для упругих сред. Действительно, с позиций чистой логики нельзя утверждать, что напряжения связаны именно с теми мерами деформаций, которые порождаются чисто геометрическими рассуждениями. К тому же, в общем случае, этих мер деформаций может быть гораздо больше, чем тензоров напряжений. Нельзя даже утверждать, что напряжения связаны с деформациями. Для неупругих материалов нетрудно показать, что напряжения в принципе не определяются мерами деформации в общепринятом смысле даже при учете предьстории процесса. Для мультиполярных упругих сред, которые моделируются оснащенными многообразиями, описанная выше схема практически не срабатывает и необходимо использовать другой подход [6]. Мерами деформации следует считать объекты, на изменениях которых совершают работу тензоры истинных напряжений Коши. В значительной мере случайно оказалось, что в классической теории упругости неполярных сред данное определение деформации совпало с чисто геометрическими построениями. Огромный и, разумеется, вполне заслуженный успех теории О. Коши привел к тому, что использованная им схема построения теории упругости стала использоваться далеко за пределами ее применимости.

1.4 Неупругость: важнейшие экспериментальные факты

Поведение твердых тел под нагрузкой изучается в течение нескольких столетий. Достаточно вспомнить знаменитый закон Гука. Однако интенсивные и целенаправленные исследования начались в XIX веке и продолжаются по настоящее время. Накоплен поистине огромный материал [7, 8], который существенно используется при формулировке практических (эмпирических) правил и нормативных документов для инженерных и конструкторских проектов, но оказывает, к сожалению, на удивление слабое влияние на теоретические исследования. Фактически, основным назначением эксперимента является проверка применимости той или иной теоретической идеи. Часты ситуации, когда экспериментатор думает, что он проводит эксперимент без опоры на теоретические воззрения. Но это означает только то, что у него имеют-

ся собственные идеи, возможно не совпадающие с принятыми теориями. Вместе с тем, на начальном этапе экспериментатор вынужден работать при отсутствии теоретических моделей, изучать видимые проявления поведения образцов при различных типах воздействий и описывать общую картину наблюдаемых явлений. Дальше в работу должен включаться теоретик и придумывать модели, которые, по крайней мере качественно, отражали бы наблюдаемые факты. Проблема ведь не в том, чтобы написать какие-то уравнения и затем их исследовать. Проблема в том, чтобы увидеть как и какими средствами работает Природа и именно это отобразить в виде упрощенной математической модели. Поэтому теоретик обязан детально знакомиться с широким спектром экспериментальных данных и по ним выдвигать гипотезы о том, что происходит на самом деле. Теория, основанная на этих гипотезах, должна вновь проверяться экспериментом, но уже целенаправленным экспериментом. К сожалению, в действительности все происходит несколько иначе. Целый ряд давно установленных экспериментальных фактов до сих пор не только не описываются существующими теориями, но и вообще не обсуждаются специалистами, занимающимися построениями теорий, описывающих поведение неупругих материалов при внешних воздействиях. Ниже будут кратко перечислены некоторые из таких фактов, причем без обсуждения сопровождающих их нюансов.

Первый. *При достаточно высоких давлениях все материалы испытывают необратимые деформации, которые можно назвать фазовыми переходами.* Газ под давлением можно превратить в жидкость, которая при повышении давления превращается в твердое тело. Последнее, в свою очередь, при повышении давления испытывает цепочку превращений, сопровождающихся заметным изменением его механических свойств. При медленных нагружениях все эти превращения происходят скачком, т.е. в результате очень быстрых динамических процессов, скорость которых не обусловлена скоростью изменения внешних нагрузок.

Второй. *При достаточно высоких давлениях все твердые тела обретают свойство текучести.* Впервые этот факт был установлен А. Треска — см. [8] — и впоследствии был многократно подтвержден многими авторами. Наиболее полными здесь считаются опыты П.У. Бриджмена. Указанный факт не следует смешивать с явлением скольжения.

Третий. *Существует характеристика материала, выражающая максимальное касательное напряжение, при котором — независимо от типа опыта — твердое тело течет.* Вообще говоря, именно этот факт отражается в критериях текучести, принимаемых практически во всех теориях пластичности. Однако дело не только и не столько в критерии текучести, сколько в определении того, что называют текучестью. Например, критерий текучести Треска, дополненный Б. Сен-Венаном известным условием о поведении тензора скоростей деформации⁴, на самом деле не имеет прямого отношения к свойству текучести. Фактически этот расширенный критерий текучести до сих пор не имеет прямого экспериментального обоснования. Напротив, известные эксперименты явно противоречат теории, основанной на расширенном критерии текучести. Например, эксперимент А. Треска по экструзии свинца [8] показывает, что свинец именно течет подобно жидкости. При этом никаких зон застоя материала не наблюдается. Теоретическое решение аналогичной задачи по теории, основанной

⁴Для краткости будем называть подобные соглашения расширенным критерием текучести.

на расширенном критерии текучести [9] (стр.218), показывает наличие зон застоя. Иными словами, налицо серьезное качественное расхождение теории и эксперимента.

Четвертый. *Эксперименты по определению диаграмм $\sigma \sim \epsilon$ показывают существенное влияние масштабного фактора.* Например, при растяжении круглого образца с начальной площадью сечения S силой P снимается диаграмма $P/S \sim \epsilon$. Затем берется образец из того же материала, но с уменьшенной вдвое площадью поперечного сечения и вновь снимается диаграмма $P/S \sim \epsilon$. Она пройдет заметно выше, чем в первом случае. Этот процесс можно повторить. Диаграммы показывают, что чем тоньше образец, тем выше оказывается предел упругости. Хотя масштабный фактор известен всем, тем не менее его природа никак не обсуждается и не учитывается при построении теории. Между тем, масштабный фактор показывает, что определяющие уравнения заведомо не могут быть сформулированы для “тела-точки” из данного материала, но должны учитывать наличие всех других “тел-точек”. Кроме того, этот факт показывает неправильность мнения, что определяемая в эксперименте диаграмма $P/S \sim \epsilon$ является неким прообразом определяющего уравнения $\sigma \sim \epsilon$. Например, рассмотрим растяжение полосы из полулинейного материала, т.е. задачу Клингбейла и Шилда [5]. В этом случае, определяющее уравнение, т.е. диаграмма $\sigma \sim \epsilon$, грубо говоря, линейна, но диаграмма $P/S \sim \epsilon$, вычисленная на основе точного решения задачи для линейной диаграммы $\sigma \sim \epsilon$, существенно нелинейна и имеет точки минимума и максимума.

Пятый. *Во всех экспериментах с мягким нагружением отчетливо проявляется эффект Савара–Массона (Портвена–Ле Шателье) [8], который заключается в следующем.* На диаграмме растяжения наблюдается многократно повторяющееся чередование участков упругости и течения. Причем на участках течения процесс носит ярко выраженный динамический характер и происходит со скоростью, определяемой самим материалом, а не условиями эксперимента.

Шестой. Наблюдался следующий факт. Брался образец из некоего материала и из него вырезался относительно небольшой контрольный объем. Методами рентгеноструктурного анализа определялись его характеристики и, грубо говоря, подсчитывалось число частиц, входящих в этот контрольный объем. Затем, аналогичный образец из того же материала растягивался в несколько раз, т.е. образец подвергался большому пластическому деформированию. После чего из этого деформированного образца вырезался точно такой же контрольный объем, как и в первом случае. Для него проводились те же самые анализы. Результат: оба контрольных объема оказались практически идентичными. Это означает, что *при пластическом деформировании теряют всякий смысл такие понятия как материальные линии, поверхности и объемы. Как следствие, теряют смысл понятия отсчетной и актуальной конфигураций и традиционные меры деформаций.*

Здесь мы остановимся, хотя, разумеется, можно указать еще много важных экспериментально установленных фактов. Например, появление так называемых линий Людерса. Перечисленные выше факты важны потому, что они наблюдаются практически во всех экспериментах. Тем не менее, ни одна из существующих теорий пластичности не описывает эти факты, за исключением, может быть, третьего из них.

1.5 Цель данной работы

Существует такой интересный объект, как тонкие порошки, применяемые в современных принтерах и копировальных машинах. Порошки являются сыпучими средами, но уже при очень малых внешних нагрузках они проявляют тенденцию к консолидации, т.е. к слипанию. В результате, порошок частично превращается в некое твердое тело. Кроме того, в порошках большую роль играют силы сухого трения между частицами. При определенных условиях порошки легко поддаются ожижению, т.е. ведут себя подобно жидкости. Причем все эти разнообразные свойства нередко проявляются одновременно, т.е. одна часть порошка ведет себя как твердое тело, другая часть порошка ведет себя как сыпучая среда, а третья — как жидкость. Все это можно наблюдать в довольно большом массиве экспериментальных данных, полученных во многих странах. Кстати говоря, весьма схожие проявления наблюдаются и в поведении грунтов, удовлетворительной теории которых в настоящее время также не построено. Поэтому практические расчеты для грунтов опираются, главным образом, на экспериментальные зависимости. Попытки использовать для описания поведения порошков известные теории неупругих материалов оказались мало удовлетворительными. Существующие теории пластичности ориентированы на определенные классы материалов в определенных условиях. Например, процессы прокатки и процессы штамповки описываются на основе разных подходов. О неудовлетворительном состоянии теории упруго-пластических материалов говорит тот факт, что вплоть до настоящего времени появляются многочисленные работы, в которых содержатся попытки пересмотра исходных положений теории, а острота имеющих место дискуссий по этой тематике не снижается.

Первоначальной целью автора являлось построение теории порошков. Однако после недолгих размышлений стало очевидным, что всякие отклонения от чисто упругих материалов порождают, по существу, одни и те же проблемы. Поэтому и речь должна идти об общей концепции теории сплошных неупругих сред. При этом нужно иметь в виду, что имеется огромный исторический опыт теоретического анализа поведения неупругих материалов. Это означает, что небольшие модификации известных подходов не позволят радикально улучшить существующее положение дел. Отсюда, в свою очередь, следует, что необходимо отказаться от попыток построения теории, способной немедленно и во всех подробностях объяснить известные экспериментальные факты. Можно попытаться подойти к решению проблемы с другого конца. А именно, временно отказавшись от стремления описать поведение конкретного материала в конкретных условиях, можно попробовать создать качественную теорию деформирования гипотетических неупругих сред. Для этой среды обязательно должны быть справедливыми только те факты, которые присущи всем неупругим материалам. При этом, на начальном этапе можно не заботиться не только о количественных совпадениях теории с экспериментом, но и о качественных расхождениях с экспериментами для каких-либо конкретных материалов. Иначе говоря, целью данной работы является попытка заложить такой фундамент теории упруго-пластических материалов, который не требовал бы полной перестройки каждый раз, когда желательно поменять ту или иную надстройку. Отсюда и требования к исходным посылкам теории: они должны быть непротиворечивыми в логическом отношении, достаточно строгими в математическом оформлении и не вступать в качественное противоречие с уже из-

вестными экспериментальными фактами. В качестве таковых автор выбрал факты, перечисленные выше.

2 Фундаментальные законы

Как уже отмечалось в первом разделе, сплошную среду при неупругом деформировании нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием. В самом деле, из опыта следует, что частицы среды, которые были соседями в один момент времени, перестают быть соседями в другие моменты времени. В такой среде возможны тангенциальные разрывы и образование полостей. Происходят перестройки структуры типа фазовых переходов. При этом указанные переходы, как правило, не могут быть обнаружены в квазистатических рассматриваниях. Из сказанного следует, что материальное описание сред с перечисленными свойствами не представляется возможным. Остается единственная возможность: строить теорию неупругих сред в чисто пространственном описании. Важным примером теории, удовлетворяющей указанным критериям, является гидромеханика в форме, представленной в первом разделе.

2.1 Материальная производная и кинематические соотношения

Выберем некоторую инерциальную систему отсчета, с помощью которой будут записываться все основные уравнения. Эта система отсчета движется относительно среды. Поэтому в некоторой фиксированной области системы отсчета в разные моменты времени оказываются разные части среды. Это означает, что необходимо использовать так называемое пространственное описание. Для этого нам понадобится понятие материальной производной, играющей важную роль при пространственном описании сплошных сред.

Рассмотрим сплошную среду, целиком заполняющую односвязную или многосвязную область в выбранной системе отсчета. Эта среда как-то движется относительно системы отсчета. В частности, среда может покоиться, а система отсчета двигаться относительно среды. С кинематической точки зрения это безразлично. При пространственном описании важную роль играет поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, где вектор \mathbf{x} задает точку системы отсчета. Тогда вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ определяет скорость той частицы среды, которая в данный момент времени t находится в точке \mathbf{x} . Пусть нам дано некоторое поле $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, которое может быть скаляром, вектором или тензором любого ранга. Оно описывает некую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке \mathbf{x} системы отсчета. Обратим внимание на то, что мы можем использовать подвижную систему координат, например, $y_k(t)$. Тогда данное (фиксированное) место \mathbf{x} в системе отсчета будет определяться координатами $y_k(t)$, т.е. будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(y_1(t), y_2(t), y_3(t), t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t).$$

Определение: материальной производной свойства $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ называется предел отношения

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Delta t. \quad (2.1)$$

или

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)}{\Delta t}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Delta t. \quad (2.2)$$

В этом определении $\Delta \mathbf{s}$ (с точностью до членов второго порядка малости) есть путь, пройденный частицей, которая в момент времени t находилась в точке \mathbf{x} , за время Δt . Числитель в (2.1) можно переписать в виде следующего разложения

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t + \Delta t).$$

Аналогичное разложение можно записать для выражения (2.2)

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t).$$

Теперь из определения (2.1) следует

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Из определения (2.2) следует аналогичное выражение

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}, t), \quad (2.4)$$

причем операторы градиента в двух последних выражениях совпадают, поскольку они не зависят от выбора системы координат в системе отсчета. В первом слагаемом правой части выражения (2.3) инвариантный, т.е. не зависящий от выбора системы координат, оператор полного дифференцирования по времени можно заменить на не инвариантный оператор частного дифференцирования по времени, но в (2.4) этого делать нельзя. В данной работе мы будем придерживаться указанного выше определения, чтобы избежать возможных недоразумений при заменах системы отсчета, когда вектор \mathbf{x} по необходимости приходится выражать в подвижной системе координат. В литературе, как правило, вместо определения (2.3) принимают следующее выражение для материальной производной [10, 11, 12]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Хотя при решении конкретных задач выражение (2.5) обычно не приводит к ошибкам, тем не менее оно вводит в заблуждение. Прежде всего, вектор \mathbf{x} в (2.5) определяет уже не произвольную точку наблюдения в системе отсчета, а задает траекторию конкретной материальной точки. Поэтому формально правильная запись выражения (2.5) выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_A, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, t), \quad (2.6)$$

где \mathbf{x}_A есть место частицы A в системе отсчета. Полная производная по времени от функции $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ в (2.5) полностью определяется самим отображением $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, суженном, разумеется, на траекторию материальной точки. Применительно к материальной

производной это обстоятельство совершенно не соответствует действительности. В определении материальной производной (2.3) содержится функция $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, которая никак не связана с отображением $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ и не определяется им. Различия в определениях (2.3) и (2.5) носят не формальный характер. Использование определения (2.5) означает, по существу, отказ от пространственного описания и переход к материальному описанию, т.е. к отказу от возможности рассматривать неупругие среды общего вида.

Обратимся к рассмотрению некоторых кинематических соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Вычислим, например, материальную производную от вектора положения \mathbf{x} частицы, находящейся в данный момент времени в точке \mathbf{x} системы отсчета

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{x} = \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Для материальной производной справедливы все правила дифференцирования. Например,

$$\frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t}. \quad (2.8)$$

С другой стороны, известно, что оператор полного дифференцирования по времени и оператор-градиент перестановочны. Для материальной производной, как видно из определения, это не верно

$$\frac{d}{dt} \nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta t} \nabla \neq \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (2.9)$$

В важном частном случае, когда скорость $\mathbf{V} = \text{const}$, операторы градиента и материальной производной перестановочны

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla = \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (2.10)$$

Вычисляя материальную производную от вектора скорости частицы, находим вектор ее ускорения

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Рассмотрим менее привычную ситуацию. Пусть, например, $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ есть тензор поворота частицы, находящейся в точке \mathbf{x} в момент времени t . Как найти ее угловую скорость? Нетрудно понять, что для этого необходимо использовать следующую модификацию уравнения Пуассона [13, 14]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \quad \mapsto \quad \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

Присутствие в этом определении скорости $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ вносит дополнительные осложнения при написании уравнения баланса энергии, как это будет видно ниже. В дальнейшем нам понадобится преобразовывать градиент угловой скорости $\nabla \boldsymbol{\omega}$. Будем действовать

следующим образом. Введем в рассмотрение тензор второго ранга $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, называемый второй мерой деформации, посредством уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^s} \mathbf{P} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \nabla \equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_\times, \quad (2.13)$$

где вектор \mathbf{f} называется вектором угловой деформации и справедливы уравнения интегрируемости [15]

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (2.14)$$

Уравнение Пуассона (2.12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{P} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}. \quad (2.15)$$

Откуда сразу же получаем выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.16)$$

Используя свойство перестановочности операторов градиента и полной производной по времени, для вспомогательного вектора $\boldsymbol{\Omega}$ получаем равенство [15]

$$\nabla \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.17)$$

Исключая отсюда вспомогательный вектор $\boldsymbol{\Omega}$ с помощью уравнения (2.13) и используя уравнение (2.14) после некоторых преобразований, получаем

$$\nabla \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.18)$$

Откуда для ротора вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеем

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + (\mathbf{F}^\Gamma - (\text{tr} \mathbf{F}) \mathbf{E}_*) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F})_\times. \quad (2.19)$$

Последние два равенства справедливы для любого вектора \mathbf{V} и будут использованы позднее. Пусть частица, которая в данный момент времени t находится в точке \mathbf{x} , в момент времени $t_0 \leq t$ находилась в точке \mathbf{x}_0 . Введем в рассмотрение вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, который переводит частицу из положения \mathbf{x}_0 в точку \mathbf{x} . Имеем очевидное равенство

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (2.20)$$

где принято обозначение

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv (\mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad \det \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) > 0. \quad (2.21)$$

Вычисляя градиент от обеих частей второго из равенств (2.20) и учитывая перестановочность операторов градиента и полной производной по времени, получаем следующие равенства

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.22)$$

Эти равенства можно найти в книгах [10, 11]. Последнее равенство можно переписать в эквивалентной форме

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.23)$$

Данное соотношение понадобится нам при записи приведенного диссипативного неравенства.

2.2 Интегральная и локальная формы закона сохранения частиц

Обратимся к рассмотрению закона сохранения частиц. Выберем некоторую инерциальную систему отсчета. Пусть Z есть данное множество односпиновых частиц. Пусть V есть некоторая фиксированная область в системе отсчета. Граница V есть замкнутая поверхность $S = \partial V$. Пусть далее $\rho(\mathbf{x}, t) dV$ есть число частиц в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x} \subset V$ в актуальный момент времени t

$$\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (2.24)$$

Закон сохранения частиц в интегральной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V}) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dV \quad (2.25)$$

Учитывая произвольность выбора области интегрирования, отсюда получаем локальную форму закона сохранения частиц

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.26)$$

С использованием материальной производной это уравнение принимает вид

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(\ln \rho)}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.27)$$

Последнему равенству с помощью (2.23) можно придать вид

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = - \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) = - \frac{\delta(\ln \rho)}{\delta t}. \quad (2.28)$$

Этому уравнению можно придать другую форму. Для этого достаточно вспомнить формулу, справедливую для любого невырожденного тензора \mathbf{g}

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T, \quad I_3(\mathbf{g}) = \det(\mathbf{g}). \quad (2.29)$$

Тогда имеем

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \frac{\delta I_3(\mathbf{g})}{\delta t}. \quad (2.30)$$

Теперь уравнение (2.28) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta t} \ln \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0. \quad (2.31)$$

Обычно считается [5, 10, 11], что отсюда следует интеграл

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0) I_3(\mathbf{g}), \quad (2.32)$$

но, строго говоря, это неверно. Действительно, допустим, что мы наблюдаем недеформирующуюся, но неоднородную, среду из движущейся инерциальной системы отсчета. Тогда имеем

$$\mathbf{g} = \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad I_3(\mathbf{g}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0). \quad (2.33)$$

Смысл последнего выражения совершенно непонятен. Как оно должно выглядеть на самом деле? Для этого нужно просто проинтегрировать уравнение (2.31). Запишем его в развернутой форме

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V} \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad \mathbf{V} = \text{const}. \quad (2.34)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{I_3(\mathbf{g})} = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{V}t), \quad (2.35)$$

где ψ есть произвольная функция. Полагая здесь $t = 0$, находим функцию ψ . В результате получаем

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x} - \mathbf{V}t). \quad (2.36)$$

Только в случае однородной среды, когда плотность среды одинакова во всех точках, решения (2.33) и (2.36) совпадают. Подчеркнем, что решение (2.36) справедливо только при выполнении условия $\mathbf{V} = \text{const}$. В общем случае уравнение (2.31), видимо, не может быть проинтегрировано. Его нужно рассматривать, как одно из уравнений, составляющих полную систему уравнений динамики сплошной среды

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad \zeta = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (2.37)$$

2.3 Интегральная и локальная формы первого закона динамики

Формулировка фундаментальных законов при пространственном описании отличается тем, что эти законы должны записываться для открытых систем [16], т.е. для систем, которые обмениваются со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией. Покажем, что при пространственном описании запись первого закона динамики Эйлера и введение тензора напряжений почти аналогичны этим операциям при материальном описании. Количество движения частиц, находящихся в области V , определяется следующим выражением

$$\mathbf{K}_1 = \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}), \quad \mathcal{K}_1 = m \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (2.38)$$

где вектор \mathcal{K}_1 называется плотностью количества движения, m есть масса частицы. Первый закон динамики Эйлера записывается в виде равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV = \int_{(V)} \rho \mathbf{F} dV + \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS - \int_{(S)} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_1 dV, \quad (2.39)$$

где последнее слагаемое определяет подвод количества движения в область V , который имеет место, например, за счет движения системы отсчета относительно среды. Покажем, что при пространственном описании применимы стандартные методы введения тензора напряжений и других подобных ему величин. Последнее слагаемое в правой части уравнения (2.39) перепишем в виде

$$\int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathcal{K}_1) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathcal{K}_1) dV$$

Теперь первый закон динамики можно переписать в виде

$$\frac{\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV}{O(\varepsilon^3)} = \frac{\frac{d}{dt} \int_{(V)} [\rho \mathbf{F} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathcal{K}_1)] dV}{O(\varepsilon^3)} + \frac{\int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS}{O(\varepsilon^2)}$$

Отсюда мы видим, что справедливо следующее равенство

$$\int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

Используя стандартные рассуждения, вводим в рассмотрение тензор напряжений

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.41)$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_{(V)} [(\rho \mathcal{K}_1)' - \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \mathcal{K}_1 + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}_1 - \nabla \cdot \mathbf{T}] dV = \mathbf{0}$$

В локальной форме первый закон динамики принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \left(\frac{d}{dt} \mathcal{K}_1 + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}_1 \right) \equiv \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{K}_1 = m \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (2.42)$$

где $m = \text{const}$ есть масса частицы, находящейся в точке \mathbf{x} в актуальный момент времени. Если все частицы среды одинаковы, то постоянная величина ρm есть плотность массы.

2.4 Интегральная и локальная формы второго закона динамики

Второй закон динамики в явной форме был впервые сформулирован Л. Эйлером в 1771 году. Однако в современную механику он был в неявной форме введен Е. и Ф. Коссера в книге [17], в которой был использован вариационный принцип. Стандартные формы вариационного принципа не применимы к открытым системам. Более современное изложение теории сплошных сред с учетом независимого второго закона динамики можно найти в работах [18, 19], в которых используется материальное описание. В данной работе используется подход Эйлера в пространственном описании, который обладает большей общностью. Запишем второй закон динамики Эйлера [16]

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_2 dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}) dV + \int_{(S)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) dS - \int_{(S)} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_2 dS \quad (2.43)$$

где \mathcal{K}_2 и \mathbf{L} суть плотности кинетического и внешнего моментов. Стандартные рассуждения позволяют ввести в рассмотрение тензор моментных напряжений \mathbf{M} и формулы Коши

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.44)$$

а также локальную форму второго закона

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \rho \mathbf{L} = \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{K}_2(\mathbf{x}, t), \quad (2.45)$$

где через вектор \mathcal{K}_2 обозначена плотность кинетического момента

$$\mathcal{K}_2 = \mathbf{x} \times \mathcal{K}_1 + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = m \mathbf{x} \times \mathbf{V} + J \boldsymbol{\omega}, \quad (2.46)$$

где тензор инерции \mathbf{C} принят для простоты шаровым, а J есть момент инерции частицы.

2.5 Интегральная и локальная формы уравнения баланса энергии

Если бы нас интересовали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия как внутренняя энергия, температура и энтропия. Собственно, понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, но там это понятие является производным и вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже неверно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее, их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики. В данной работе используются формулировки, которые не

являются общепринятыми. В частности, понятие энтропии, используемое ниже, отличается от известных определений⁵. Полная энергия частиц, попадающих в область V в системе отсчета, может быть представлена в следующем виде

$$E = \int_{(V)} \rho(\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV, \quad (2.47)$$

где \mathcal{K}, \mathcal{U} суть плотности кинетической и внутренней энергий соответственно, причем плотность кинетической энергии определена выражением

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.48)$$

Что касается внутренней энергии, то она характеризует свойство системы запасать и отдавать энергию только за счет изменения конфигурации системы и некоего параметра, называемого энтропией. Легко доказать, что внутренняя энергия не может зависеть от скоростей. Уравнение баланса энергии или первый закон термодинамики для произвольной физической системы гласит: **скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “не механического происхождения”, обычно в форме тепла.** Дать общее и строгое определение понятию энергии “не механического происхождения” затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия не механического происхождения — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним сказанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x . Рассмотрим две похожих ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} c (x_1 - x_2)^2. \quad (2.49)$$

Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по разному

$$1. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2); \quad 2. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (2.50)$$

В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии “не механического происхождения” отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии “не механического происхождения”. При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Для сплошной среды, находящейся в выделенном объеме V системы отсчета, урав-

⁵Энтропия, видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

нение баланса энергии записывается в форме интегрального равенства:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV = \int_{(V)} \rho [\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + q] dV + \int_{(S)} (\mathbf{T}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega} + h_n) dS - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (\mathcal{K} + \mathcal{U}) dS, \quad (2.51)$$

где тепловой поток $h_{(n)}$ выражается через вектор \mathbf{h} потока тепла по правилу Стокса

$$h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \quad (2.52)$$

Следует подчеркнуть, что в понятие тепла включаются все виды энергии, которые не определяются полностью кинетической и внутренней энергией, а также мощностью внешних воздействий. Иными словами, тепло не обязательно связано с температурой и энтропией, хотя, во многих случаях, это именно так. В локальной форме уравнение баланса энергии записывается в следующем виде

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q. \quad (2.53)$$

В правой части этого равенства стоит мощность силовых и моментных напряжений. Часть этой мощности идет на изменение внутренней энергии. Оставшаяся часть мощности частично остается в теле в форме тепла, а частично рассеивается в окружающую среду. Чтобы разделить эти части, тензоры силовых и моментных напряжений представим в виде разложений

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_i, \quad (2.54)$$

где индексом “e” отмечена составляющая напряжений, не зависящая от скоростей, а индексом “i” обозначена вся оставшаяся часть напряжений. Используя это разложение, уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q + \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.55)$$

В такой форме уравнение баланса энергии еще мало о чем говорит. В частности, отсюда не видно от каких аргументов зависит внутренняя энергия. При построении конкретных теорий уравнение баланса энергии должно быть преобразовано к следующей форме

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^T (\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^T (\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}, \quad (2.56)$$

где тензоры \mathbf{A} и \mathbf{B} называются первой и второй мерой деформации соответственно, скалярные функции ϑ и \mathcal{H} называются температурой и плотностью энтропии. Равенство (2.56) называется приведенным уравнением баланса энергии. При его написании

в рассмотрение введены два новых параметра: температура ϑ и плотность энтропии \mathcal{H} . Тот факт, что введены только два новых параметра определяется исключительно нашим желанием. С не меньшим основанием вместо (2.56) мы могли бы написать приведенное уравнение баланса энергии в такой, например, форме

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^\top(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^\top(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \rho \vartheta_1 \frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta t} + \rho \vartheta_2 \frac{\delta \mathcal{H}_2}{\delta t},$$

где в каждой точке системы отсчета введены две температуры и две энтропии. Так, например, приходится делать в теории оболочек [24]. Написание приведенного уравнения баланса энергии в форме (2.56) продиктовано нашим желанием обойтись минимумом используемых средств. Из уравнения (2.56) сразу видно, что внутренняя энергия зависит от мер деформации \mathbf{A} и \mathbf{B} , а также от энтропии.

2.6 Второй закон термодинамики и приведенное уравнение баланса энергии

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т.е. в неучитываемую нами, Вселенную.

При введении второго закона термодинамики обычно рассматриваются тепловые машины и циклы Карно. И то, и другое понятия относятся скорее к области правдоподобных рассуждений, нежели к рациональной науке. На механику сплошных сред второй закон термодинамики был распространен Дюгемом [20]. Принятая в настоящее время трактовка второго закона термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема была предложена К. Трусделлом в 1960 году [21] и явилась развитием идей Дюгема. В данной работе будет использована другая схема введения второго закона термодинамики и понятия энтропии, которая в большей степени опирается на чисто механические соображения. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии⁶. Более того, маловероятно, что в обозримом будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом. В современной механике сплошных сред это просто некий прием, причем очень не

⁶Проблема состоит в отсутствии строгого определения понятия температуры. Это понятие, по мнению автора, невозможно ввести без использования концепции электромагнитного поля, которое и вынуждает тепло течь от горячего к холодному.

совершенный, позволяющий в известной мере учесть энергию движения неучитываемого нами бесконечного множества степеней свободы как самого тела, так и его окружения.

Начнем с обсуждения уравнения баланса энергии (2.51). Скорость подвода энергии в нем определена тремя величинами q , h_n и последним интегралом в правой части (2.51). Что касается последнего слагаемого, то оно не имеет отношения к тепловой энергии. Поэтому нужно обсудить только первые два слагаемых, т.е. величину

$$\int_{(V)} \rho q dV + \int_{(S)} h_n dS = \int_{(V)} (\rho q + \nabla \cdot \mathbf{h}) dV. \quad (2.57)$$

Именно эта величина определяет скорость подвода тепловой энергии в рассматриваемое тело. Однако это не весь подвод (отвод) энергии. Нужно еще учесть диссипацию энергии внутри самого выделенного тела. Как осуществляется этот учет, будет показано ниже. Вернемся к понятию внутренней энергии. По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, **обязана зависеть от** неких относительных **скоростей** игнорируемых нами переменных. Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время, известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно неких средних положений, которые и воспринимаются нами, как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Короче говоря, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И эта игнорируемая нашими моделями часть Вселенной всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на ее внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т.е. от положений и поворотов частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого плотностью энтропии \mathcal{H} , причем полная энтропия системы считается аддитивной функцией массы

$$H = \int_{(V)} \rho \mathcal{H} dV \quad (2.58)$$

Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических,

свойствами. Коль скоро мы ввели новый параметр (новую степень свободы), то мы должны для него сформулировать некий дополнительный закон, который играет роль второго закона термодинамики в механике сплошных сред. Вид этого закона поддается нам простым сравнением уравнений баланса энергии в формах (2.55) и (2.56), из которого следует равенство

$$\rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q + \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.59)$$

Это равенство перепишем в другой форме

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q = \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \rho \delta, \quad \rho \delta \equiv \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.60)$$

В левой части этого равенства стоит скорость подвода энергии. Часть этой энергии аккумулируется в теле. Она идет на изменение внутренней энергии, что и указывается первым слагаемым в правой части равенства (2.60). Это слагаемое представлено в виде произведения двух функций: температуры ϑ и материальной производной от энтропии. Энтропию можно считать не имеющей размерности. Поэтому температура имеет размерность энергии. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится. По смыслу своего введения **температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы**. Принятая трактовка энтропии и температуры несколько отличается от трактовки, используемой в физике. В частности, энтропия не является логарифмом вероятности чего-то, что вообще нельзя определить в механике сплошных сред. Тем не менее, все сказанное полностью согласуется с теми действиями, которые мы совершаем при введении энтропии и температуры в механике, уравнения которой ничего не знают о том, что думают по поводу температуры и энтропии в статистической физике. Второе слагаемое $\rho \delta$ в уравнении (2.60) есть часть тепловой энергии, которая не может быть аккумулирована в данной точке тела и либо излучается в окружающую среду, либо переносится в другие точки тела посредством вектора потока тепла. Прежде чем двигаться дальше, вернемся к примеру, рассмотренному в предыдущем пункте, о двух грузиках, соединенных пружиной и демпфером и находящихся в трубке с идеально гладкими стенками. Уравнение баланса энергии для этой системы дается вторым из выражений (2.50). Введем два новых параметра H и ϑ такие, что

$$\vartheta \dot{H} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (2.61)$$

Это и есть второй закон термодинамики, записанный для рассматриваемой элементарной системы. Уравнение (2.61) содержит две новых неизвестных, введенных совершенно формально. Примем теперь, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ есть измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию H . Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры

$$\vartheta = \vartheta(H) = c^{-1} H \quad \Rightarrow \quad H = c \vartheta, \quad (2.62)$$

где c есть экспериментально определяемый параметр. Подставляя (2.62) в (2.61), получаем уравнение

$$c \vartheta \dot{\vartheta} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \Rightarrow \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2b}{c} \int_0^t (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 dt \right]^{1/2}, \quad (2.63)$$

где ϑ_0 есть начальная температура. Если наблюдаемые экспериментальные данные удается удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c , то определяющее уравнение (2.62) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение. Если принять определяющее уравнение (2.62), то уравнение баланса энергии (2.50) сведется к закону сохранения энергии расширенной системы, включающей демпфер в качестве поглотителя механической энергии и накопителя тепловой энергии

$$\dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(E + \frac{1}{2} c \vartheta^2 \right) = 0.$$

На этом примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы посредством второго закона термодинамики получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т.е. энергия движения игнорируемых степеней свободы. Дальнейшее обсуждение этого примера можно опустить, поскольку цель примера состояла в демонстрации идеи введения энтропии. Возвращаемся к уравнению (2.60), которое содержит достаточно много произволов, чтобы удовлетворить весьма широким потребностям. Иными словами, принятие уравнения (2.60), называемого уравнением теплопроводности, не содержит в себе ничего обременительного, поскольку оно включает в себя несколько неизвестных, т.е. не замкнуто. Назначение второго закона термодинамики состоит, в частности, в том, чтобы сказать нечто определенное о неизвестных, входящих в уравнение (2.60), т.е. идеологически обосновать процедуру замыкания уравнения (2.60). В частности, второй закон термодинамики или, что то же самое, опыт утверждает, что

$$\rho \delta \equiv \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \geq 0. \quad (2.64)$$

Последнее неравенство можно интерпретировать как утверждение о том, что **силы трения**, а именно с ними связываются напряжения \mathbf{T}_i и \mathbf{M}_i , **не могут совершать положительной работы**. Кроме того, важнейшим опытным фактом, известным под названием нулевого закона термодинамики, является утверждение о том, что **тепло всегда течет от горячего к холодному**, т.е. утверждается справедливость неравенства

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (2.65)$$

Как известно, оба неравенства (2.64) и (2.65) не противоречат никаким опытным фактам и могут считаться надежно установленными. Поэтому формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если неравенства (2.64) и (2.65) вытекают из нее в качестве следствий. Подробное изложение истории развития понятия

энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в книге [20]. Исходя из равенства (2.60), мы видим, что если в системе нет механизмов внутреннего рассеяния энергии, т.е. $\delta = 0$, то все тепло аккумулируется в системе и сохраняется в нем. По аналогии с “чистой” механикой можно сказать, что в этом случае мощность теплового воздействия $\rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h}$ оказывается материальной производной от некоей функции, т.е. тепловая энергия является в некотором смысле консервативной. Если диссипация в системе имеется и выполняется неравенство (2.64), то из равенства (2.60) следует неравенство

$$\rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h} \leq \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}, \quad (2.66)$$

которое в литературе [4] трактуется, как ограничение сверху для скорости подвода тепла. С подобной трактовкой трудно согласиться, ибо и температура, и энтропия сами зависят от скорости подвода тепла. Пусть, например, даны две функции $\mathbf{y}(t) > 0$ и $B(t) > 1$. Для них справедливо неравенство $\mathbf{y}(t) < \mathbf{y}(t)B(t) + 1$. Однако отсюда не следует, что функция $\mathbf{y}(t)$ ограничена сверху. Вообще, в так называемой рациональной термодинамике далеко не все утверждения кажутся бесспорными. Рассмотрим, например неравенство Клаузиуса–Дюгема. Для его получения достаточно записать выражение для материальной производной от энтропии и затем воспользоваться уравнением теплопроводности (2.60). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{H} dV - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \mathcal{H} dS &= \int_{(V)} \rho \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} dV = \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{q} + \delta) + \nabla \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dV = \\ &= \int_{(V)} \frac{\rho \mathbf{q}}{\vartheta} dV + \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dS + \int_{(V)} \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta}{\vartheta} dV + \int_{(V)} \frac{\rho \delta}{\vartheta} dV. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Учитывая неравенства (2.64) и (2.65), отсюда немедленно получаем

$$\int_{(V)} \rho \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} dV \geq \int_{(V)} \frac{\rho \mathbf{q}}{\vartheta} dV + \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dS. \quad (2.68)$$

Это и есть неравенство Клаузиуса–Дюгема, которое положено в основу большинства современных работ по механике сплошных сред. Разумеется, оно правильно. Но из этого неравенства не следует ни принцип диссипации (2.64), ни нулевое начало термодинамики (2.65). Из неравенства Клаузиуса–Дюгема вытекает более слабое неравенство

$$\rho \delta + \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (2.69)$$

По мнению автора, это неравенство является слишком слабым для физических приложений. Поэтому в данной работе под вторым законом термодинамики будет пониматься уравнение теплопроводности (2.60) в совокупности с неравенствами (2.64) и (2.65). Можно также добавить, что в современных теориях придается явно преувеличенное значение таким понятиям как температура и энтропия. В настоящее время объективный характер этих величин еще не установлен. Конечно, термометр позволяет нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой.

Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял. Для целей данной работы с формальной точки зрения не очень важно, какую именно трактовку принимать для второго закона термодинамики. В словесной формулировке второй закон термодинамики утверждает, что *тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду*. При этом следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т.е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии. Используя уравнение теплопроводности (2.59) и исключая тепловые слагаемые из уравнения баланса энергии (2.53), получаем приведенное уравнение баланса энергии

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}. \quad (2.70)$$

Если в рассмотрение ввести плотность свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$, то этому равенству можно придать вид

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.71)$$

Приведенное уравнение баланса энергии должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Поскольку в это равенство никакие внешние параметры не входят, то оно доставляет ограничения, налагаемые на определяющие уравнения среды.

2.7 Пример. Задача Кэйли

Чтобы немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке — см. стр.114 учебника [22]. В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи. Через x обозначим свисающую часть цепи. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left(\rho x \frac{dx}{dt} \right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt} \frac{dx}{dt}, \quad (2.72)$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи. Уравнение (2.72) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе

$$\frac{d}{dt} [\rho (L - x) 0] = F + \frac{d\rho (L - x)}{dt} \frac{dx}{dt} \Rightarrow F = \rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (2.73)$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (2.72), приходим к уравнению, используемому Кэйли. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т.е. примем следующие начальные условия

$$t = 0 : x = 0, \quad \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = g t^2 / 6. \quad (2.74)$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [22]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (2.74), но любители парадоксов идут дальше. Выясним сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1 , когда $x = L$, т.е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \rho g L^2 / 2, \quad K_1 = \rho g L^2 / 3 \quad \Rightarrow \quad P_1 + K_1 = 5 \rho g L^2 / 6 \neq P_0 = \rho g L^2. \quad (2.75)$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho g L^2 / 6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости \dot{x} , т.е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения. Менее тривиален вопрос о правильной записи уравнения баланса энергии в этой задаче. Собственно, именно в этом пункте и возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Через \mathcal{U} обозначим массовую плотность внутренней энергии цепи, т.е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $d\mathcal{U} = \rho dx \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна. Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho x \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} - F \frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho x)}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{U} \right]. \quad (2.76)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (2.76) для решения (2.74) тождественно выполняется. Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho L \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} + \delta. \quad (2.77)$$

Здесь δ есть скорость подвода энергии в цепочку. Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\Delta = \int_0^{t_1} \delta dt = \left[\frac{1}{2} \rho x \dot{x}^2 \right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2} \rho g x^2 \right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6} \rho g L^2, \quad (2.78)$$

где использовано решение (2.74). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “не механического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее, мы говорим, что энергия (2.78) рассеялась в окружающую среду в форме тепла. Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным выше примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им истолкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще и механика открытых систем в частности всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

3 Приведенное уравнение баланса энергии и соотношения Коши–Грина

Чтобы эффективно использовать уравнение баланса энергии (2.71), его необходимо преобразовать к виду (2.56). Поскольку в этом параграфе будут обсуждаться исключительно упругие силовые и моментные напряжения, то временно нижний индекс e будем опускать. Нам понадобится тождество, справедливое для любого вектора \mathbf{a}

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \quad (3.1)$$

Теперь с учетом этого тождества и равенства (2.23) имеем

$$\mathbf{T}^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} - \frac{1}{2} (\mathbf{T}_\times \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \quad (3.2)$$

С учетом равенства (2.18) для тензора моментных напряжений имеем

$$\mathbf{M}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_\times \times \mathbf{P}]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (3.3)$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии (2.71) принимает вид

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T})_\times \times \mathbf{P}]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \quad (3.4)$$

Из этого уравнения мы видим, что свободная энергия есть функция следующих аргументов

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vartheta, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}). \quad (3.5)$$

Теперь приведенное уравнение баланса энергии можно переписать в виде

$$\left[\rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^{\top} + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\top} + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{\top} \right] \cdot \cdot \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \left(\rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\top} - \mathbf{M}^{\top} \right) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} + \mathcal{H} \right) \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \left[\rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right) - \frac{1}{2} \left((\mathbf{M}^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T})_{\times} \times \mathbf{P} \right) \right]^{\top} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = 0. \quad (3.6)$$

Поскольку эта линейная форма скоростей должна обращаться в нуль для любых процессов, могущих протекать в данной среде, причем на скорости не наложено никаких ограничений, то для выполнения (3.6) необходимо выполнение следующих условий, называемых соотношениями Коши–Грина

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{T}_e = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{\top} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^{\top}, \quad \mathbf{M}_e = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.7)$$

Что касается коэффициента при производной от тензора поворота, то он не обязан равняться нулю, т.к. компоненты тензора поворота не являются независимыми. Действительно, согласно модифицированному уравнению Пуассона (2.12) имеем ограничение на материальную производную от тензора поворота следующего вида

$$\frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E} \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^{\top} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}. \quad (3.8)$$

Следовательно, для коэффициента при производной от тензора поворота должно выполняться равенство

$$\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} - \frac{1}{2} (\mathbf{M}_e^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}_e)_{\times} \times \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}.$$

Чтобы исключить отсюда произвольный симметричный тензор \mathbf{A} , необходимо умножить это уравнение на тензор \mathbf{P}^{\top} слева и вычислить векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства. Результатом указанных операций будет следующее уравнение

$$\left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\top} + \mathbf{M}_e^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}_e \right]_{\times} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\top} + \mathbf{M}_e^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}_e \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.9)$$

которое должно выполняться для любого антисимметричного тензора \mathbf{A} . Поскольку тензоры силовых и моментных напряжений уже определены соотношениями Коши–Грина, то условие (3.9) налагает некоторые ограничения на задание свободной энергии. А именно свободная энергия должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^{\top} \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^{\top} \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\top} \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (3.10)$$

где \mathbf{A} — произвольный кососимметричный тензор, так что фактически уравнение (3.10) эквивалентно трем независимым уравнениям. Таким образом, свободная энергия не может быть произвольной функцией аргументов $\mathbf{P}, \mathbf{g}, \mathbf{F}$. Характеристическая

система [23] для уравнения (3.10) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (3.11)$$

Получили систему уравнений 21-го порядка, которая имеет не более 20-и независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от антисимметричного тензора \mathbf{A} . Система (3.11) служит для определения мер деформации, от которых зависит свободная энергия и которые должны находиться как интегралы характеристической системы для уравнения (3.10). Аналогичная ситуация рассматривалась в работе [6], в которой показан метод отыскания мер деформации. В принципе, общие построения, относящиеся к обратимым свойствам среды, на данном этапе можно считать завершенными. Конкретное задание свободной энергии, удовлетворяющей уравнению (3.10), полностью определяет физические свойства среды с точностью до механизма диссипации энергии, который должен конструироваться отдельно. Дальнейшее изложение уже должно быть ориентировано на конкретные приложения к определенным типам сред. Однако прежде, чем переходить к рассмотрению конкретных сред, необходимо еще рассмотреть условия на разрывах.

4 Условия на разрывах

До сих пор все рассуждения относились к областям, внутри которых все рассматриваемые функции предполагались непрерывными и дифференцируемыми нужное число раз. Эксперименты показывают, что эти предположения выполняются далеко не всегда. Об этом свидетельствует, например, появление линий Людерса, демонстрирующих наличие плоскостей скольжения. Вместе с тем, те же эксперименты показывают, что линии Людерса образуют дискретную сетку. Это означает, что разрывы возникают на дискретном множестве поверхностей, вне которых все рассматриваемые функции можно считать непрерывными. Естественно считать, что все фундаментальные законы, записанные в интегральной форме, справедливы всюду. Только переход к локальной их записи требует существования непрерывности и непрерывной дифференцируемости. Допустим теперь, что область V содержит поверхность S_d , при переходе через которую рассматриваемые величины могут терпеть разрывы. Поверхность S_d делит область V на две V^+ и V^- так, что $V = V^+ \cup V^-$. Для каждой из этих областей можно записать фундаментальные законы, из которых и следуют условия на разрывах.

Закон сохранения частиц. Запишем законы сохранения частиц для всей области V и для обеих подобластей V^+ и V^- .

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V^+)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S^+)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{(S_d)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V^-)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S^-)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{(S_d)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (4.3)$$

где единичный вектор \mathbf{n} есть вектор внешней нормали к соответствующей области. Складывая равенства (4.2) и (4.3) и учитывая (4.1), получаем

$$\int_{(S_d)} \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] = 0, \quad (4.4)$$

где, как обычно, квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках. Аналогично поступаем и с остальными фундаментальными законами.

Первый закон динамики Эйлера дает

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{m} \mathbf{V}], \quad (4.5)$$

где учтено условие (4.4).

Второй закон динамики Эйлера с учетом предыдущих условий на разрывах ведет к следующему условию

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{M}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{m} \mathbf{V} \times \mathbf{x} + \mathfrak{K}_2] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{J} \boldsymbol{\omega}_2]. \quad (4.6)$$

Здесь учтено выражение (2.46) для плотности кинетического момента.

Уравнение баланса энергии на поверхности разрыва принимает вид

$$\mathbf{n} \cdot [\mathfrak{h} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{K} + \mathfrak{U}]. \quad (4.7)$$

Полученные условия на разрывах показывают, что они сводятся к условиям непрерывности силовых и моментных напряжений когда на поверхности разрыва скоростей выполняется равенство

$$\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (4.8)$$

т.е. отсутствует поток количества движения через поверхность разрыва. Обратим внимание, что в условия на разрывах входят полные тензоры силовых и моментных напряжений.

5 Неполярная сплошная среда с кулоновым трением

Сосредоточим свое внимание на пластических и сыпучих средах со слабо выраженной микроструктурой. В таком случае можно считать, что свободная энергия не зависит от тензора поворота и второй меры деформации \mathbf{F} , т.е. примем, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vartheta, \mathbf{g}) \quad (5.1)$$

Соотношения Коши–Грина (3.7) принимают вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{T}_e = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Уравнение (3.10) в этом случае сводится к следующему

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_e = \mathbf{T}_e^T. \quad (5.3)$$

Дальнейший анализ проще продолжать не с этого момента, а вернувшись немного назад к уравнению баланса энергии (3.4), которое в данном случае принимает вид

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}_e^T) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (5.4)$$

Тензор напряжений представим в виде разложения

$$\mathbf{T}_e = -p \mathbf{E} + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad \text{tr } \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (5.5)$$

Кроме того, комбинируя (2.27) и (2.23), получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right). \quad (5.6)$$

Подставляя (5.5) в (5.4) и учитывая (5.6), приходим к равенству

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = \frac{p + \lambda}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} - (\lambda \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}^T) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (5.7)$$

Свободную энергию будем считать функцией трех аргументов $\vartheta, \rho, \mathbf{g}$, между которыми имеется связь (5.6), учитываемая множителем Лагранжа λ . Из (5.7) получаем следующие соотношения Коши–Грина

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p + \lambda = \rho^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}, \quad \lambda \mathbf{E} + \boldsymbol{\tau} = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T. \quad (5.8)$$

Симметричность тензора $\boldsymbol{\tau}$ и требование $\lambda = 0$ приводят к следующим ограничениям, налагаемым на свободную энергию

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot \mathbf{g} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad (5.9)$$

Для свободной энергии получили два уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система [23] для первого из этих уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad (5.10)$$

Эта система определена в девятимерном пространстве тензоров второго ранга. Уравнение (5.3) показывает, что свободная энергия постоянна вдоль интегральной кривой уравнения (5.10). Иными словами, свободная энергия есть интеграл системы (5.10) девятого порядка, для которой существует не более восьми независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от произвольно выбираемого тензора \mathbf{A} . Таких интегралов шесть, и их нетрудно найти. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (5.10) на тензор \mathbf{g}^T слева. В результате получим

$$\mathbf{g}^T \cdot \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{g}^T}{ds} \cdot \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}. \quad (5.11)$$

Складывая получившиеся уравнения, находим шесть скалярных интегралов уравнения (5.10) или один тензорный интеграл

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_* = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \mathbf{G}_*, \vartheta). \quad (5.12)$$

Тензор \mathbf{G}_* хорошо известен в литературе по нелинейной теории упругости [5]. Он является обратным для меры деформации Коши–Грина, но редко используется в теории определяющих уравнений. Таким образом, если свободная энергия задана как произвольная функция тензора \mathbf{G}_* , то она тождественно удовлетворяет первому из условий (5.9). Для выполнения второго из условий (5.9) необходимо, чтобы выполнялось следующее условие

$$\mathbf{g} \cdot \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_* \cdot \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}_*} \right)^T = 0. \quad (5.13)$$

Характеристическая система для второго из этих уравнений имеет вид первого из уравнений

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{G}_* \Rightarrow \frac{d\mathbf{G}_*^m}{ds} = m \mathbf{G}_*^m, \quad (5.14)$$

где m есть любое целое число. Это система шестого порядка, которая имеет не более пяти независимых интегралов. Нетрудно убедиться, что общим интегралом системы (5.14) является унимодулярный тензор

$$\mathbf{G} = I_3^{-1/3}(\mathbf{G}_*) \mathbf{G}_*, \quad I_3(\mathbf{A}) \equiv \frac{1}{6}(\text{tr} \mathbf{A})^3 - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{A}) \text{tr} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A}^3 \equiv \det(\mathbf{A}), \quad I_3(\mathbf{G}) = 1. \quad (5.15)$$

Тензор, аналогичный тензору \mathbf{G} , но построенный для тензора Альманзи \mathbf{A} , В.А. Пальмов [10, 11] называет тензором формоизменения. Чтобы убедиться, что тензор \mathbf{G} действительно является интегралом системы, т.е.

$$\frac{d\mathbf{G}}{ds} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{G}^m}{ds} = \mathbf{0},$$

достаточно воспользоваться представлением (5.15) для тензора \mathbf{G} и вторым из уравнений (5.14). Окончательно получили, что свободная энергия имеет вид функции

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \mathbf{G}, \vartheta), \quad (5.16)$$

где уже все аргументы независимы. Определяющие уравнения (3.7) теперь принимают вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \rho \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2 \rho I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^T. \quad (5.17)$$

Этим соотношениям, с учетом обозначения (2.37) можно придать вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2 I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^T, \quad (5.18)$$

где свободная энергия считается функцией аргументов ϑ , ζ , \mathbf{G} . Соотношениями (5.17) и (5.18) заканчивается определение упругих напряжений. Дальнейшая конкретизация требует задания свободной энергии. Об этом речь пойдет ниже, но уже сейчас необходимо подчеркнуть, что все пластические свойства материала заключены в задании свободной энергии.

Обратимся к обсуждению тензоров вязких напряжений, которые отвечают исключительно за механизмы диссипации энергии в материале. Следует подчеркнуть, что пластичность материала — это его фундаментальное свойство, которое не исчезает даже в том случае, если диссипация энергии в материале отсутствует. Поэтому роль вязких напряжений на самом деле не слишком значительна. Исключение, возможно, составляют сыпучие среды, в которых, по мнению многих авторов, важную роль играет сухое трение между частицами среды. Убедительных способов введения сухого трения в механику сплошных сред в настоящее время не предложено, хотя этому посвящено большое число публикаций, обзор которых выходит за рамки данной работы. Обычно считается, что вязкое трение зависит от градиента вектора скорости. Так обстоит дело, например, в ньютоновской жидкости, материале Максвелла [12] и наиболее популярных теориях пластичности [10, 11]. Использование подобного допущения позволяет, по всей вероятности, получать результаты, приемлемые с практической точки зрения. Анализ роли вязких напряжений оставим за рамками данной работы и ограничимся введением только сухого трения. Примем допущение, что тензоры вязких напряжений можно представить в следующем простейшем виде

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{E} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

При этих допущениях неравенство (2.64) принимает вид

$$\rho \delta \equiv \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) \equiv -2\mathbf{t} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \right) \geq 0. \quad (5.20)$$

Для вектора напряжений \mathbf{t} считаем, что справедлив закон сухого трения Кулона

$$\mathbf{t} = -k |\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n}| \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n}) \frac{(2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V})}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|}, \quad \boldsymbol{\omega} \neq \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}, \quad (5.21)$$

где $k > 0$ — коэффициент трения, который является характеристикой материала; характеристическая функция σ определяется выражением

$$\sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} < 0, \\ 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} \geq 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Единичный вектор \mathbf{n} в выражении (5.21) находится по тензору \mathbf{T}_e из решения задачи

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} = \max, \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m}: |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (5.23)$$

Покажем, что решение задачи (5.23) единственно, если оно, конечно, существует. В самом деле, рассмотрим функционал

$$\mathcal{J} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} + \lambda_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \lambda_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1) + \lambda_3 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - 1), \quad (5.24)$$

где параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть множители Лагранжа. Обращение в нуль первой вариации этого функционала дает уравнения

$$\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} = -\lambda_1 \mathbf{m} - 2\lambda_2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = -\lambda_1 \mathbf{n} - 2\lambda_3 \mathbf{m}. \quad (5.25)$$

Из уравнений (5.25) следуют условия

$$2\lambda_2 = 2\lambda_3 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m}, \quad -\lambda_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m}. \quad (5.26)$$

При этом система (5.25) может быть переписана в эквивалентной форме

$$\mathbf{T}_e \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = (2\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{m} - \mathbf{n}), \quad \mathbf{T}_e \cdot (\mathbf{m} + \mathbf{n}) = -(2\lambda_2 + \lambda_1)(\mathbf{m} + \mathbf{n}). \quad (5.27)$$

Отсюда видим, что векторы $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ являются собственными векторами симметричного тензора \mathbf{T}_e . Пусть вектор $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ соответствует собственному числу σ_i тензора \mathbf{T}_e , а вектор $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ соответствует собственному числу σ_j . Тогда имеем

$$(2\lambda_2 - \lambda_1) = \sigma_i, \quad \mathbf{m} - \mathbf{n} = \sqrt{2}\mathbf{e}_i, \quad -2\lambda_2 - \lambda_1 = \sigma_j, \quad \mathbf{m} + \mathbf{n} = \sqrt{2}\mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \\ \sqrt{2}\mathbf{n} = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i, \quad \sqrt{2}\mathbf{m} = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i, \quad (5.28)$$

где векторы \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j суть собственные векторы тензора напряжений. Функционал (5.24) теперь принимает вид

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{T}_e \cdot (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_i). \quad (5.29)$$

Функционал принимает наибольшее значение, если σ_j является наибольшим собственным числом, а σ_i — наименьшим. Если эти собственные числа совпадают, то решением рассматриваемой задачи является произвольная пара ортогональных векторов, а все касательные напряжения обращаются в нуль. Нетрудно убедиться, что второе из условий (5.26) выполняется тождественно

$$-\lambda_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j).$$

Сказанное выше относилось к случаю скольжения. Если проскальзывание отсутствует, т.е. если выполняется условие

$$2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (5.30)$$

то вектор \mathbf{t} находится из уравнений движения, а точнее по второму закону динамики

$$-2\mathbf{t} = \rho J \frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \boldsymbol{\omega} = \rho J \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right) = \frac{1}{2} \rho J \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{V} \right). \quad (5.31)$$

Используя это соотношение, вектор \mathbf{t} можно исключить из первого закона динамики.

6 О задании свободной энергии

Рассмотренные до сих пор построения носили достаточно общий характер и, по существу, не являются новыми. Их даже можно назвать стандартными, поскольку в той или иной форме они представлены в существующих монографиях, не говоря уже о статьях. Тем не менее, один новый элемент в этих построениях все-таки содержится. Он заключается в том, что до сих пор не принималось никаких предположений о свойствах среды, помимо допущений локальной сплошности. Поэтому все сказанное выше применимо для описания неупругих и, в частности, пластических и сыпучих сред. Ранее неоднократно высказывалась точка зрения [25], что неупругие среды на этапе нагружения ведут себя вполне аналогично нелинейно упругим телам, отличаясь от них только на этапе разгрузки. Выше было показано, что полная аналогия с нелинейной теорией упругости должна иметь место во всех случаях. Вместе с тем, неконкретизированной у нас осталась только свободная энергия. Следовательно, именно в ней должна содержаться вся информация о свойствах среды. Таким образом, именно задание конкретного вида свободной энергии полностью определяет все свойства среды. В этом смысле позиция в данной статье в общем совпадает с позицией, принятой в физике и описанной, например, в [26]. О современном состоянии вопроса можно получить представление по статье [27], где можно найти ссылки на другие работы по данной тематике. Однако, по мнению автора, подход, изложенный в [26, 27], не позволяет в полной мере описать уравнения состояния твердых тел. Действительно, различие между жидкостями и твердыми телами заключается, главным образом, в их реакции на изменение формы. Описать эту реакцию посредством манипуляций с параметрами порядка, игнорируя при этом девиатор тензора напряжений, автору представляется совершенно невозможным. Без учета девиатора тензора напряжений можно описать только различие между жидкостями и газами. Вернувшись к механике сплошных сред, заметим, что, при классическом подходе к описанию пластических материалов, центральную роль играет так называемый критерий текучести, т.е. некое условие, налагаемое на девиатор тензора напряжений. Из критерия текучести следует так называемый ассоциативный закон течения. Поскольку тензор напряжения выражается через производные от свободной энергии, то все эти условия должны налагаться на свободную энергию, однако это обстоятельство никогда не принималось во внимание. К сожалению, конкретные виды свободной энергии известны и изучены только для нескольких разновидностей упругих материалов. Поэтому анализ возможных форм задания свободной энергии целесообразно начать с частных случаев. Прежде всего, примем, что материал является изотропным. Это означает, что свободная энергия зависит только от инвариантов тензора \mathbf{G}

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vartheta, \rho, I_1, I_2), \quad I_1(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{G}, \quad I_2(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G}. \quad (6.1)$$

Подставляя эти представления в соотношения Коши–Грина (5.18), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - \\ 2 \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2 \right), \quad \boldsymbol{\Lambda} = I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где тензор $\mathbf{\Lambda}$ есть тензор формоизменения, отвечающей мере деформации Альманзи [10, 11]. Поскольку материал изотропен, то собственные векторы тензора напряжений и меры Альманзи совпадают. Инварианты тензора формоизменения Альманзи связаны с его собственными числами следующими зависимостями

$$I_1(\mathbf{G}) = I_1(\mathbf{\Lambda}) = \Lambda_i + \Lambda_j + \frac{1}{\Lambda_i \Lambda_j}, \quad I_2(\mathbf{G}) = I_2(\mathbf{\Lambda}) = \Lambda_i^2 + \Lambda_j^2 + \frac{1}{\Lambda_i^2 \Lambda_j^2}. \quad (6.3)$$

Чтобы упростить ход дальнейших рассуждений, рассмотрим специальный вид деформации материала в виде сплошного шара. Примем, что справедливы соотношения

$$\mathbf{u} = -\lambda \mathbf{r}_e \Rightarrow \mathbf{g} = (1 + \lambda) \mathbf{E}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} \quad (6.4)$$

где $\lambda = \text{const}$. Величина λ положительна при сжатии. В таком случае, соотношения Коши–Грина (6.2) заметно упрощаются

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{E}) \equiv f(\zeta, \vartheta). \quad (6.5)$$

Таким образом, для рассматриваемого типа деформации свободная энергия зависит всего от двух переменных. То же самое можно сказать и о давлении, для которого, вероятно, вполне приемлема следующая, линейная по температуре, аппроксимация

$$p(\zeta, \vartheta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) \vartheta. \quad (6.6)$$

Вполне вероятно, что в дальнейшем понадобятся и более сложные зависимости от температуры. Однако интуитивно кажется ясным, что для качественных рассмотрения аппроксимация (6.6) вполне приемлема. Во всяком случае, именно такой вид имеют наиболее популярные в физике уравнения состояния Ван-дер-Ваальса и Ми-Грюнайзена. В частности, уравнение Ван-дер-Ваальса в принятых обозначениях имеет вид

$$p(\zeta, \vartheta) = -\frac{a}{\zeta^2} + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad (6.7)$$

где a , b и c суть постоянные материала. Известно, что уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо описывает поведение реальных газов. Интуитивно кажется очевидным, что уравнение (6.6) при соответствующем выборе функций f_1 и f_2 должно хорошо описывать не только газы и жидкости, но и твердые тела с фазовыми переходами. Качественно функция $f_1(\zeta)$, которая, с формальной точки зрения, описывает давление при нулевой температуре $\vartheta = 0$, представлена на Рис.1. Напомним, что давление считается положительным при сжатии. Представленная на Рис.1 зависимость характерна для материалов, упрочняющихся как при сжатии, так и при растяжении. Сплошной линией на диаграмме представлены участки устойчивого деформирования. Пунктирная линия соответствует участкам неустойчивого деформирования, причем на этих участках отсутствуют положения статического равновесия. Кружочками на диаграмме обозначены положения устойчивого равновесия материала при нулевом давлении. Число устойчивых равновесных положений определяется не только свойствами материала, но и размерами образца. Например, при увеличении радиуса сжимаемого шара число устойчивых равновесных положений будет, вообще говоря, возрастать. Число

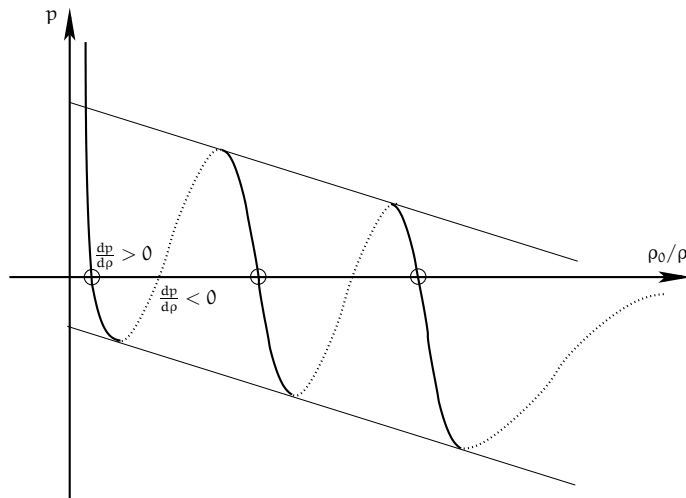


Рис. 1: Определяющее уравнение для давления при нулевой температуре

устойчивых равновесных положений сильно зависит и от свойств материала. Например, для тонких порошков и грунтов число устойчивых равновесных положений очень велико. Рассмотрим изотермическое нагружение шара давлением. Допустим, что в исходном состоянии плотность материала соответствовала крайнему правому кружочку на диаграмме. Начнем теперь медленно увеличивать давление. При этом шар будет квазистатически сжиматься, и мы будем двигаться от правого крайнего кружочка влево-вверх по сплошной линии диаграммы. Когда давление достигнет первой критической величины, соответствующей локальному максимуму диаграммы, квазиравновесное деформирование становится невозможным, а в материале начинается структурная перестройка, сопровождающаяся быстрым самопроизвольным увеличением плотности при почти постоянном давлении. Это будет продолжаться до тех пор, пока мы снова не попадем на сплошную линию. При дальнейшем медленном увеличении давления плотность будет медленно (квазистатически) возрастать, пока не будет достигнут следующий локальный максимум. Если, не достигнув второго локального максимума, мы начнем снижать давление до нуля, то попадем в средний кружочек на диаграмме, который соответствует устойчивому состоянию материала с повышенной плотностью. Иными словами, происходит пластическое деформирование шара. Весь описанный процесс отчетливо наблюдался в опытах Бриджмена [8]. Если теперь начать процесс растяжения шара, т.е. начать прикладывать отрицательное давление, то от среднего кружочка мы начнем двигаться по сплошной линии диаграммы вправо-вниз, при этом будет идти процесс квазистатического растяжения

шара. Когда мы достигнем локального минимума, то происходит срыв и начинается самопроизвольное уменьшение плотности материала при почти постоянном давлении. Если материал обладает свойством упрочнения (как это имеет место на изображенной диаграмме), то мы вновь попадем на участок устойчивого растяжения. При дальнейшем увеличении растягивающего давления, мы достигнем крайнего правого локального минимума, в котором произойдет разрушение шара. Следует подчеркнуть, что учет конечности прочности материала на разрыв строго обязателен для определяющих уравнений реальных материалов. Кроме того, обратим внимание на тот факт, что в точках локальных минимумов и максимумов происходит нарушение условий так называемой сильной эллиптичности. Разумеется, нарушаются и постулаты типа популярного постулата Драккера. С математической точки зрения это, конечно, неприятно, но так уж устроена природа вещей. Легко понять, что зависимости, типа указанных на Рис.1, принципиально не могут быть найдены из эксперимента. Однако огибающие истинной диаграммы могут быть установлены и фактически определяются на основе эксперимента. Причем верхняя огибающая описывает свойства материала при сжатии, а нижняя огибающая описывает прочность материала на разрыв. Одним из простейших представителей определяющего уравнения для материала с конечной прочностью на разрыв является уравнение вида

$$f_1(\zeta) = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}), \quad m > n. \quad (6.8)$$

Что касается функции f_2 , то, видимо, ее допустимо принять в той же форме, что и в уравнении Ван-дер-Ваальса. Это возможно, по крайней мере, при качественных рассмотрениях. Достаточно общий вид определяющего уравнения для давления дается следующим выражением

$$p = \sum_{k=0}^N a_k \zeta^{-k} + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad (6.9)$$

где параметры (a_k, N, c, b) суть характеристики материала. Одним из простейших является следующее определяющее уравнение

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad m > n, \quad \zeta > b. \quad (6.10)$$

Это уравнение содержит пять параметров (f_0, m, n, c, b) , которые позволяют описать достаточно широкие классы материалов, но, конечно, уравнение (6.10) не является универсальным. Нетрудно построить фазовые диаграммы, отвечающие уравнению (6.10), при различных значениях температуры. Примерный вид зависимостей давления от плотности при некоторых значениях температуры представлены на Рис.2, где приняты значения $m = 5, n = 3$. Жирные кривые разделяют различные фазы материала. Ниже нижней жирной линии материал находится в твердой фазе. Между жирными кривыми материал находится в жидкой фазе. Выше верхней жирной линии материал находится в газообразной фазе.

При нулевой температуре⁷ среда находится в твердой фазе, плотность которой при нулевом давлении равна $\zeta = 1$ или $\rho = \rho_0$. При температуре $\vartheta = \vartheta_f$, которую можно

⁷Разумеется, наши рассуждения не принимают во внимание квантовые эффекты.

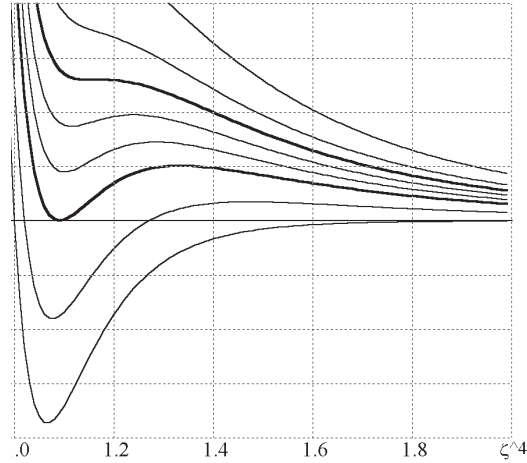


Рис. 2: На рисунке разные кривые отвечают разным температурам: чем выше температура, тем выше расположена кривая.

назвать температурой плавления, среда может находиться в двух фазах: твердой и жидкой. Температура плавления находится из решения системы уравнений

$$f_0(\zeta_f^{-m} - \zeta_f^{-n}) + \frac{c \vartheta_f}{\zeta_f - b} = 0, \quad f_0(-m \zeta_f^{-m-1} + n \zeta_f^{-n-1}) = \frac{c \vartheta_f}{(\zeta_f - b)^2}, \quad (6.11)$$

где ζ_f отвечает плотности среды при температуре плавления. Поскольку величины ϑ_f и ζ_f являются характеристиками материала, то систему (6.11) можно использовать для определения параметров среды. Выше температуры плавления, но ниже критической температуры ϑ_c , среда может находиться только в двух фазах: жидкой и газообразной. При этом нулевое давление в среде возможно только при нулевой плотности среды $\zeta = \infty$. Критическая температура ϑ_c находится из решения системы уравнений

$$f_0(-m \zeta_c^{-m-1} + n \zeta_c^{-n-1}) = \frac{c \vartheta_c}{(\zeta_c - b)^2},$$

$$f_0(m(m+1) \zeta_c^{-m-1} - n(n+1) \zeta_c^{-n-1}) = -\frac{2c \vartheta_c}{(\zeta_c - b)^3}.$$

Эту систему также можно использовать для определения параметров среды, если известна ее критическая температура. При температурах выше критической $\vartheta > \vartheta_c$ материал ведет себя подобно газу. Мы опускаем дальнейшее обсуждение фазовых диаграмм, поскольку оно достаточно стандартно, хотя сами фазовые диаграммы для уравнения типа (6.10) ранее, видимо, не встречались. Уравнение (6.10) соответствует двухфазной среде. В более общем случае коэффициенты уравнения (6.9) должны подбираться так, чтобы уравнение состояния имело вид, представленный на Рис.3 Согласно (6.5) и (6.10) для свободной энергии получаем равенство

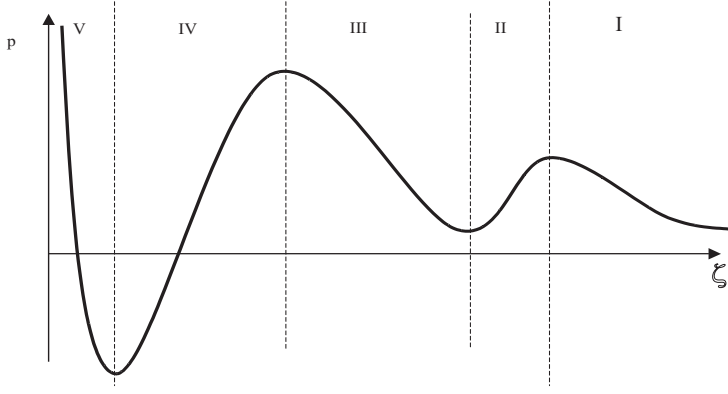


Рис. 3: Определяющее уравнение для трехфазной среды: зоны I, III, V соответствуют устойчивым газовой, жидкой и твердой фазам соответственно; зоны II, IV отвечают метастабильным состояниям

$$f = \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{E}) = f_0 \left(\frac{\zeta^{-m+1}}{m-1} - \frac{\zeta^{-n+1}}{n-1} \right) - c \vartheta \ln(\zeta - b) + \psi(\vartheta), \quad m > n, \quad \zeta > b, \quad (6.12)$$

где $\psi(\vartheta)$ есть подлежащая определению функция температуры. Таким образом, часть свободной энергии, отвечающая шаровой части тензора напряжений, построена. Теперь необходимо найти часть свободной энергии, соответствующую девиатору тензора напряжений. Свободную энергию представим в виде суперпозиции двух частей

$$\rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{G}) = \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{E}) + \rho_0 \mathcal{F}_d(\zeta, \vartheta, I_1, I_2), \quad \mathcal{F}_d(\zeta, \vartheta, 3, 3) = 0, \quad (6.13)$$

где первое слагаемое в правой части определено выражением (6.12), причем оно не влияет на девиатор тензора напряжений. Второе слагаемое в (6.13) определяет девиатор тензора напряжений. Эта часть свободной энергии отлична от нуля только для твердой фазы материала. Теперь соотношения Коши–Грина (6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - \\ 2 \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2 \right), \quad \boldsymbol{\Lambda} = I_3^{-2/3} (\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Понятно, что при температурах выше точки плавления материала функция $\rho_0 \mathcal{F}_d$ должна обращаться в нуль. Вычислим максимальное касательное напряжение в материале. Пусть σ_j соответствует наибольшему главному напряжению, а σ_i есть наименьшее главное напряжение. Пусть τ_j и τ_i суть соответствующие главные значения девиатора тензора напряжений. Тогда имеем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_j - \sigma_i}{2} = \frac{\tau_j - \tau_i}{2} = \frac{(\Lambda_i - \Lambda_j)}{\zeta} \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \right) \quad (6.15)$$

В любом твердом теле касательное напряжение имеет верхнюю границу α , которая зависит от температуры и плотности

$$\alpha = \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right), \quad \vartheta \leq \vartheta_f; \quad \alpha = 0, \quad \vartheta \geq \vartheta_f, \quad (6.16)$$

где $\tau_p(\zeta)$ есть предельное касательное напряжение при нулевой температуре. Таким образом, получаем двухстороннее неравенство

$$0 \leq \frac{(\Lambda_i - \Lambda_j)}{\zeta} \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \right) \leq \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right), \quad \vartheta \leq \vartheta_f. \quad (6.17)$$

При температуре выше точки плавления функция $\rho_0 \mathcal{F}_d$ обращается в нуль. Введем обозначение

$$\rho_0 \mathcal{F}_d = \zeta \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right) \mathcal{T}. \quad (6.18)$$

Тогда предыдущее неравенство принимает вид

$$0 \leq (\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_2} \right) \leq 1, \quad \vartheta < \vartheta_f. \quad (6.19)$$

где функция \mathcal{T} не зависит от температуры. При достижении максимальным касательным напряжением верхней границы, тело переходит в состояние текучести или разрушается в результате деформации скольжения. Условие текучести имеет вид

$$(\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_2} \right) = 1. \quad (6.20)$$

Функция $\mathcal{T}(\Lambda_j, \Lambda_i)$, вообще говоря, зависит от двух переменных (Λ_j, Λ_i) . Условие (6.20) показывает, что на поверхности текучести она становится функцией только одной переменной. Чтобы найти эту переменную, необходимо найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка (6.20). В результате пришли к чисто математической задаче о нахождении класса функций, тождественно удовлетворяющих условиям (6.19) и (6.20). Общее решение этой задачи в настоящее время не известно. Не исключено, однако, что в решении этой задачи нет необходимости. Условия (6.19) и (6.20) появились в результате нашего желания удовлетворить одному из утверждений А. Треска, использованному впоследствии Сен-Венаном. Но, как отмечает Дж. Белл [8] (стр. 32) фактически это утверждение до сих пор остается предположением, а не экспериментально доказанным фактом. Возможно, что условия (6.19) и (6.20) не обусловлены априорными требованиями, а являются следствием решения краевых задач теории неупругих сред. Поэтому ниже будет использовано выражение для энергии формообразования, которое тождественно не удовлетворяет условиям (6.19) и (6.20).

Выпишем теперь полное уравнение для давления

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \vartheta}{\zeta - b} - \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial \zeta}, \quad m > n, \quad \zeta > b > 0. \quad (6.21)$$

Последнее слагаемое в этой формуле определяет влияние энергии формоизменения на давление. Только для жидкости и газа это слагаемое обращается в нуль. Поэтому уравнение состояния для твердых тел нельзя свести к уравнению относительно трех переменных (давлению, плотности и температуре), как это пытаются сделать в физике. Введение параметров порядка не может улучшить ситуацию, поскольку фундаментальные законы ничего не знают об их существовании. Таким образом, в общем случае деформирования твердого тела давление зависит от энергии формоизменения, причем влияние последней может оказаться весьма существенным, поскольку оно может снизить критические значения давления, при которых нарушаются условия сильной эллиптичности. Кроме того, последние могут нарушаться раньше, чем давления достигнут критического значения. В настоящее время математическая сторона обсуждаемого вопроса еще не исследована.

7 К теории безмоментной несимметричной среды с кулоновым трением

Выше была рассмотрена среда, тензор обратимых напряжений в которой симметричен. Интуитивно кажется вполне вероятным, что имеет смысл рассмотреть случай среды с несимметричным тензором обратимых напряжений, в которой тензор моментных напряжений отсутствует. Особенно это может оказаться важным при наличии сухого трения между частицами, поскольку в таком случае есть возможность дать более простую в применениях формулировку закона сухого трения. К сожалению, подробное обсуждение возникающих здесь особенностей выходит за рамки данной работы. Ограничимся поэтому только первым шагом. Примем, что свободная энергия есть функция вида

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{g}, \mathbf{P}). \quad (7.1)$$

Тогда соотношения Коши-Грина (3.7) примут вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{T}_e = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Для антисимметричной части тензора напряжений имеем соотношение (3.9), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T - \mathbf{T}_e \right]_{\times} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T - \mathbf{T}_e \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T. \quad (7.3)$$

Подставляя сюда тензор напряжений (7.2), получаем ограничение на свободную энергию

$$\left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0,$$

которое перепишем в стандартном виде

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right]^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right]^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) = 0 \quad (7.4)$$

Характеристическая система [23] для уравнения (7.4) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Эта система 12-го порядка имеет 11 независимых интегралов, но только 9 из них не зависят от произвольного антисимметричного тензора \mathbf{A} . Легко убедиться, что отмеченные интегралы являются координатами тензора

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{g}. \quad (7.6)$$

Таким образом, свободная энергия рассматриваемой среды имеет вид

$$\rho_0 \mathcal{F} = \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{g}). \quad (7.7)$$

Дальнейшие построения аналогичны тем, которые были использованы в предыдущем пункте.

8 Сводка основных уравнений

Для свободной энергии выражение (6.13) конкретизируем в простейшей форме

$$\rho_0 \mathcal{F} = \rho_0 \mathcal{F}(\rho, \mathbf{G}, \vartheta) = f(\zeta, \vartheta) + \frac{\zeta \mu(\zeta, \vartheta)}{2} (\text{tr} \mathbf{G} - 3) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} = \mu(\rho, \vartheta) \mathbf{E}. \quad (8.1)$$

Соотношения Коши–Грина (6.14) в этом случае принимают вид

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial f}{\partial \zeta} - (\text{tr} \mathbf{G} - 3) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta \mu}{2} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = -\mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \left(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{E} \right), \quad (8.2)$$

где функция f дается выражением (6.12). Для энтропии получаем следующее представление

$$\mathcal{H} = -\frac{d\psi}{d\vartheta} + c \ln(\zeta - b) - \frac{\partial \mathcal{F}_d}{\partial \vartheta}. \quad (8.3)$$

Посмотрим, во что превращаются эти уравнения, если вектор перемещений \mathbf{u} считать малым. При этом имеем

$$I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) = 1 + \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} - 2\text{deve} \boldsymbol{\epsilon}, \quad 2\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{E} = -2\text{deve} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (8.4)$$

В принятом приближении определяющие уравнения (8.2) имеют вид

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\rho, \vartheta) \text{deve} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (8.5)$$

Эти уравнения позволяют назвать коэффициент μ модулем сдвига. Использовать линейные определяющие уравнения (8.5) в теории неупругих сред, конечно, рискованно,

ибо вектор перемещения во многих практических ситуациях не является малым. Поэтому пользоваться нужно нелинейными соотношениями (8.2). Выберем теперь произвольную пару единичных ортогональных векторов \mathbf{n}, \mathbf{m} . Касательное напряжение, действующее по площадке с нормалью \mathbf{n} в направлении вектора \mathbf{m} , определяется формулой

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{m}). \quad (8.6)$$

Как видим, при выборе свободной энергии в форме (8.1) касательное напряжение автоматически не удовлетворяет ограничению (6.17), что усложняет все рассмотрение. Здесь необходимо действовать следующим образом. Выпишем неравенство

$$\left| \mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{m}) \right| \leq \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right). \quad (8.7)$$

Когда достигается знак равенства, решение нужно искать на классе разрывных функций. Та часть материала, в которой условие (8.7) выполняется со знаком равенства, начинает скользить относительно части среды, в которой имеет место строгое неравенство (8.7). Обсуждение всех возникающих здесь вопросов требует много места и выходит за рамки данной работы. Разумеется, желательно так задать свободную энергию, чтобы неравенство (6.17) выполнялось бы автоматически. Решение здесь должно быть примерно таким же, как при написании свободной энергии для объемных деформаций. Существует, однако, возможность, что ничего этого делать не придется, а течение материала будет происходить не при постоянном касательном напряжении. Иными словами, лучше обойтись без традиционного критерия текучести, который к тому же не имеет прямого подтверждения экспериментами. Что касается зависимости модуля сдвига от плотности и температуры, то она имеет примерно следующий вид

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right) \zeta^p \exp \left[-\frac{(\zeta - 1)^2}{c^2} \right]. \quad (8.8)$$

Иными словами, модуль сдвига должен обращаться в нуль как при высоких давлениях, так и при низких плотностях.

Выпишем полную систему уравнений динамики рассматриваемой среды. Закон сохранения частиц принимаем в форме (2.37)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0. \quad (8.9)$$

Первый закон динамики имеет вид

$$-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \times \mathbf{t} + \rho \mathbf{F} = \rho m \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right). \quad (8.10)$$

Второй закон динамики Эйлера необходимо формулировать в двух альтернативных формах

$$2k \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \frac{(2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V})}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|} = \rho J \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right), \quad |2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}| \neq 0 \quad (8.11)$$

или

$$\mathbf{t} = -\frac{1}{4}\rho J \nabla \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right), \quad 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad |\mathbf{t}| < 2k \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}). \quad (8.12)$$

Вектор \mathbf{n} в уравнениях (8.11) и (8.12) находится из решения задачи (5.23). Для замыкания системы к выписанным уравнениям необходимо добавить определяющие уравнения

$$p = -\frac{\partial f}{\partial \zeta} + (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta \mu}{2} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = -\mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \left(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{E} \right) \quad (8.13)$$

и геометрические уравнения

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{g}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (8.14)$$

Последние два уравнения взаимозаменяемы. Наконец, уравнение теплопроводности имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q = \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \rho \delta. \quad (8.15)$$

В заключение этого пункта приведем постановку задачи о сферически симметричной деформации полого шара. Пусть при $t = 0$ шар занимал область $a_0 < r_0 < b_0$, а в актуальный момент времени он занимает область $a < r < b$. Вектор смещения зададим в виде $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$. Введем обозначения

$$p = 1 - \frac{u}{r} > 0, \quad q = 1 - \frac{du}{dr}, \quad z = \left(\frac{q}{p} \right)^{2/3}, \quad \mathbf{e}_r \equiv \mathbf{e}. \quad (8.16)$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{g} = q \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + p (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad \mathbf{G} = \boldsymbol{\Lambda} = z^2 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + z^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad I_3(\mathbf{g}) = qp^2. \quad (8.17)$$

Для инвариантов тензора формоизменения справедливы формулы

$$I_1(\mathbf{G}) = z^2 + 2z^{-1} \geq 3, \quad I_2(\mathbf{G}) = z^4 + 2z^{-2} \geq 3. \quad (8.18)$$

Внутреннее рассеяние энергии считаем чисто тепловым, т.е. вектор \mathbf{t} будем считать равным нулю. Закон сохранения частиц в рассматриваемом случае можно представить в форме

$$\frac{\partial(\zeta z p^2)}{\partial t} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial(\zeta z p^2)}{\partial r} = 0. \quad (8.19)$$

Уравнения движения в данном случае сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \frac{\rho_0}{\zeta} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right], \quad v = \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.20)$$

Для простоты модуль сдвига определим формулой

$$\mu = \frac{\mu_0}{\zeta} \frac{1 - \vartheta/\vartheta_f}{1 - 293/\vartheta_f} \vartheta \left(\frac{1 - \vartheta/\vartheta_f}{1 - 293/\vartheta_f} \right), \quad (8.21)$$

где μ_0 есть модуль сдвига при комнатной температуре, $\theta(x)$ есть ступенчатая функция Хевисайда. Определяющее уравнение для давления принимает вид

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad m > n, \quad \zeta > b. \quad (8.22)$$

Для девиатора тензора напряжений имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(z^2 - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right). \quad (8.23)$$

Тогда нормальные напряжения определяются формулами

$$\sigma_r = -p - \frac{2\mu}{3} \left(z^2 - \frac{1}{z} \right), \quad \sigma_\varphi = -p + \frac{\mu}{3} \left(z^2 - \frac{1}{z} \right). \quad (8.24)$$

Энтропия задается выражением

$$\mathcal{H} = -\frac{d\psi}{d\vartheta} + c \ln(\zeta - b) - \frac{\zeta}{2\rho_0} (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}. \quad (8.25)$$

Осталось записать уравнение теплопроводности

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = \rho \vartheta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \right), \quad q = \delta = 0, \quad \mathbf{h} = k(\vartheta) \nabla \vartheta, \quad k > 0. \quad (8.26)$$

Теперь необходимо сформулировать краевые и начальные условия. Краевые условия примем в следующем виде

$$r = a(t) = a_0 + \mathbf{u}(a(t), t) : \sigma_r = -p_a(t); \quad r = b(t) = b_0 + \mathbf{u}(b(t), t) : \sigma_r = -p_b(t). \quad (8.27)$$

Первое и третье из этих соотношений служат для определения актуальных положений границ. Кроме того, нужно принять условие для теплового потока. Если теплообмен с окружающей средой отсутствует, то он равен нулю. Начальные условия можно принять, например, такими, чтобы при $t = 0$ шар находился в натуральном состоянии.

Как видим, даже для относительно простой задачи получается весьма сложная система уравнений, не поддающаяся точному аналитическому решению.

9 Заключение

Выше был представлен набросок теории неупругих сред. Нерешенной, с теоретической точки зрения, осталась проблема конкретного задания “девиаторной” части свободной энергии. Тем не менее, и эта проблема сформулирована так, что она доступна решению математическими средствами. Поэтому можно надеяться, что математики перестанут уклоняться от разработки теории неупругих сред. Тем более, что в математическом отношении эта теория несравнимо богаче и интереснее, нежели нелинейная теория упругости. Можно сказать, что теория неупругих сред — это теория фазовых переходов в твердых телах. Однако среди этих переходов встречаются и неклассические фазовые переходы, связанные с перестройками структуры твердых тел. При этом, вообще говоря, в теории нет никакой необходимости в критериях типа критериев текучести, которые фактически определяются желанием подогнать теорию под эксперимент, но которыми заведомо не может руководствоваться Природа.

Список литературы

- [1] Эйлер Л. Общие принципы движения жидкостей. *Mem. Acad.roy. sci. et belles-lettres*, Berlin, **11** (1755), 274–315, 1757 (*Opera omnia*, II–12). (На латинском языке)
- [2] Эйлер Л. Новый метод определения движения твердых тел. *Novi commentarii Acad. sci. imp. Petrop.*, **20** (1775), 208–238, 1776 (*Opera omnia*, II–9). (На латинском языке)
- [3] Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. *Encyclopedia of Physics*. III/3, Springer-Verlag, 1965.
- [4] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Наука, 1975. 592с.
- [5] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512с.
- [6] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. // *Механика и процессы управления*. Труды СПбГТУ, №386, С.–Петербург, 1982, сс.29–46.
- [7] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I. М.: Наука, 1984. 597с.
- [8] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. М.: Наука, 1984. 432с.
- [9] Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. М.: ГИТТЛ, 1956. 407с.
- [10] Пальмов В.А. *Колебания упруго-пластических тел*. М.: Наука, 1976. 328с.
- [11] Palmov V. *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*. Berlin: Springer, 1998.
- [12] Годунов С.К. *Элементы механики сплошной среды*. М.: Наука, 1978. 303с.
- [13] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики абсолютно твердого тела. // *Механика и процессы управления*. Труды СПбГТУ, №443, С.–Петербург, 1992, сс.100–121.
- [14] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies. // *ZAMM Z. angew. Math. Mech.* **76** (1996), **4**, pp.187-204.
- [15] Жилин П.А. Реальность и Механика. // *Труды XXIII школы–семинара "Анализ и синтез нелинейных механических систем"*. С.–Петербург, 1996, сс.6–49.
- [16] Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики. // *Труды XXII школы–семинара "Анализ и синтез нелинейных механических систем"*. С.–Петербург, 1995, сс.10–36.
- [17] Cosserat E. et F. *Théorie des corps deformables*. Hermann, Paris, 1909.
- [18] Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media — I. The classical theory. *Int. J. Engng. Sci.* (1971), vol.9, pp.271–305.

- [19] Eringen A.C. Theory of Micropolar Media.
- [20] Truesdell C. Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New-York, 1984. 578p.
- [21] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. Handbuch der Physik. Vol. III/1. Springer-Verlag, 1960.
- [22] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том II. М.: Наука, 1983. 640с.
- [23] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830с.
- [24] Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces. Int. J. Solids Structures, 1976, vol.12, pp.635-648.
- [25] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744с.
- [26] Френкель Я.И. Введение в теорию металлов. М.: GIFML, 1958. 368с.
- [27] Кукушкин С.А., Осипов А.В. Теория фазовых переходов первого рода вблизи тройной точки газ — жидкость — кристалл. Неорганические материалы, 1999, том 35, №6, с.661-668.

Основные положения эйлеровой механики*

Аннотация

Доклад содержит обсуждение современных трактовок основных понятий механики. Эти трактовки по форме, а иногда и по существу, отличаются от приводимых в учебниках механики. Хотя вводить какие бы то ни было модификации в устоявшиеся каноны крайне нежелательно и даже вредно, тем не менее в любой развивающейся науке наступает момент, когда модификации необходимы. Важно только, чтобы эти модификации не вступали в противоречие с уже доказанными положениями и не отрицали ничего из достигнутого ранее. В частности, эйлерова механика включает в себя все достижения ньютоновой механики и добавляет к ней важные новые возможности, расширяющие сферу приложения механики.

1 Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена единоличных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительно отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удастся только на больших интервалах времени. Революция в физике, произошедшая в начале XX века, не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики из-за их логической непоследовательности. С другой стороны, к концу XIX века уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то недостает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затуманивать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь

*Жилин П.А. Основные положения эйлеровой механики // Труды XXIX летней школы "Актуальные проблемы механики", Санкт-Петербург, 2002. С. 641–675.

были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуру механики. Другим фактом являлось “печальное поведение” (выражение А.Ю.Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Сказанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX века начало развиваться некое расширение классической механики, связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинорных движений. Без последних, по воззрениям Дж.Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Другой важной особенностью, не учитываемой классической механикой, является отсутствие в ней понятия излучения, с помощью которого описывается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Описанные и некоторые другие особенности классической механики были почему-то объявлены органическими пороками классической механики и новейшая физика заявила о “решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира”. Здесь не место вдаваться в дискуссии. Отметим только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики. Цель данного краткого сообщения как раз и состоит в том, чтобы дать набросок взглядов современной рациональной механики. Огромный вклад в формирование этих взглядов внес Леонард Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Показательно, что роль Л. Эйлера долгое время оставалась неосознанной. Например, Г. Герц [8] пишет: “...главные вехи (развития механики) обозначены именами Архимеда, Галилея, Ньютона, Лагранжа.” Как видим, имя Эйлера в этом перечне даже не фигурирует. Подобная позиция присуща и подавляющему большинству современных работ по теоретической физике. Автор полагает, что если бы Дж. Максвелл, Г. Лоренц и другие крупнейшие физики XIX-го века были осведомлены о результатах позднего Л. Эйлера, то облик современной физики мог бы быть совершенно другим. К сожалению, резко негативную роль сыграла здесь талантливая, но крайне легковесная, книга Э. Маха [9].

В заключение этого пункта подчеркнем, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное ниже ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Вполне очевидно, что так называемая шестая проблема Гильберта принципиально не допускает решения.

2 Пространство, время, движения

2.1 Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [1]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном

всяких меток, пространстве невозможно обнаружить движение, равно как невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O , и тремя некопланарными “векторами” \mathbf{e}_k , то есть тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. “Векторы” \mathbf{e}_k нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются. Зато существование “векторов” \mathbf{e}_k позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно “векторов” \mathbf{e}_k определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \leq x^k \leq \infty$, ($k = 1, 2, 3$), где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{e}_k \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty. \quad (1)$$

Будем считать, что вектор \mathbf{r} , отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k , определяет точку, фиксированную относительно репера репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение “векторов” \mathbf{e}_k

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m| |\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \quad (2)$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, то есть имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками A и B по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn} (x_A^m - x_B^m) (x_A^n - x_B^n). \quad (3)$$

Числа x_A^k называются координатами точки A . Вершине репера отвечают координаты $x_A^k = 0$.

Определение 2.2.1: репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек (1) называется телом отсчета.

Сам репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x_A^k называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но об этом будет сказано позднее. Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета, и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны. Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как

функция независимой переменной t , называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И.Ньютон писал [2], с.45: “Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время” . . . под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время”. Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак не на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX века в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л.Больцманом: “Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы назвали временем” [3], с.8. Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П.Боль среди таких проблем указал следующую: “Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь” [4], с.198. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д.Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже (1900 г.) при формулировке им 6-ой проблемы. Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы во многих работах А.Пуанкаре — см., например, [5]. Удивительно, что эти исследования до их пор либо вообще игнорируются, либо очевидным образом искажаются. Если говорить о времени, то согласно А.Пуанкаре, главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных по выбранным часам интервалов времени, т.е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т.е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечаем, что данная работа следует классическим традициям.

Определение 2.2.2: *тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.*

Можно ввести сколько угодно систем отсчета и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т.е. ее вектор положения \mathbf{r}_A задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное выше, определено с точностью до преобразования $t \rightarrow \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Из сказанного следует, что введенные выше системы

отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

2.2 Инерциальные системы отсчета

Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех ее понятий, является принцип инерции Галилея (**GPI**). Отказ от этого принципа разрушает все здание классической физики.

Принцип инерции Галилея: *всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Следует ясно понимать, что **GPI** не является ни принципом, ни аксиомой, ни постулатом в строгом смысле этих понятий, ибо использует не определенные заранее понятия: абсолютное пространство, прямолинейное и равномерное движение. Фактически **GPI** дает определение понятия прямолинейного и равномерного движения: *движение изолированной частицы в абсолютном пространстве называется прямолинейным и равномерным.* При этом не имеет значения как на самом деле движется изолированная частица в абсолютном пространстве. Важно только то, что это движение является для нас эталоном, посредством которого будут оцениваться все остальные движения. Обратим внимание на то, что в абсолютном пространстве нельзя ввести понятие прямой линии. В теле отсчета понятие прямой линии уже определено. Поэтому из всех мыслимых тел отсчета можно отобрать кандидатов на роль абсолютного пространства.

Определение 2.2.3: *тело отсчета называется инерциальным, если траектория любой изолированной частицы есть прямая линия в этом теле отсчета.*

Инерциальных тел отсчета бесконечно много. Они движутся друг относительно друга и различаются масштабами расстояний (матрицами g_{mn}). Важно, что при отборе инерциальных тел отсчета не используется понятие времени.

Определение 2.2.4: *множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.*

Определение 2.2.5: *часы называются оттарированными в соответствии с GPI, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в инерциальном теле отсчета.*

Легко убедиться, что время, измеряемое по различным часам, оттарированным по Галилею, определено с точностью до линейного преобразования: $t \rightarrow kt + t_0$, где k определяет масштаб измерения времени, а t_0 — начало отсчета.

Определение 2.2.6: *инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными по Галилею, называется инерциальной системой отсчета.*

Определение 2.2.7: *множество инерциальных систем отсчета называется абсолютным пространством-временем классической физики.*

Из сказанного выше очевидно, что в классической физике пространство и время образует единое четырехмерное пространство, т.е. в нем пространственно-временные отношения не являются независимыми, как это утверждается в новейшей физике.

Замечание. Аксиоматическое введение времени детально обсуждается в работе С.Зарембы [7]. Более детальное изложение содержания этого и следующего пунктов можно найти в работе [11].

2.3 Системы отсчета и системы координат

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

Определение 2.2.8: *система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.*

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \implies x' = x'(y', t). \quad (4)$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \implies y^m = y^m(y', t). \quad (5)$$

где как бы забыто о существовании формул (4). Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (5), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

Принцип объективности: *все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т.д.) зависят от выбора системы отсчета. Недопустимо поэтому смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются [11], где также вводятся инвариантные дифференциальные операторы.

2.4 Трансляционные и спинорные движения

Существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые ниже спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам.

Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору \mathbf{a}_* сопоставляется “обычный” вектор \mathbf{a} :

- 1) \mathbf{a} расположен на оси спин-вектора \mathbf{a}_* ,
- 2) модуль \mathbf{a} равен модулю \mathbf{a}_* ,

3) \mathbf{a} направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Спинорные движения определяются заданием собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(t) = +1. \quad (6)$$

Тензор $\mathbf{P}(t)$ ниже будет называться тензором поворота [12]. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от \mathbf{E} , однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(t) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (7)$$

где единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$, является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(t)$, т.е. $\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}(t)$, а угол $\theta = \theta(t)$ называется углом поворота. Вектор $\Theta = \theta(t)\mathbf{m}(t)$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(t) = \exp[\Theta \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{R} = \Theta \times \mathbf{E}, \quad (8)$$

где тензор $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T$ называется логарифмическим тензором поворота. Представление (8) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина: $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$ — левый тензор спина и $\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}}$ — правый тензор спина. Оба тензора спина кососимметричны и имеют сопутствующие векторы: $\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$, $\mathbf{S}_r = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (9)$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Подробнее о тензоре поворота и его представлениях можно ознакомиться по работам [8,9].

3 Тела и их динамические структуры

3.1 Тела–точки и их размерность

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Уже одно это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютоновскую) механику, т.к. материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело–точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела–точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела–точки определено, если задан его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела–точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_{\times}, \quad ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (10)$$

Аксиома Т1: *кинетическая энергия тела–точки есть квадратичная форма его скоростей*

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (11)$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела–точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства. Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота. Представление (11) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела–точки. Тогда (11) принимает вид $2K = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{v}$. Положим здесь $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ и получим $2K = mv^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{n}$. Примем теперь во внимание, что система отсчета изотропна, т.е. телу–точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только тогда, когда выполняется равенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot \mathbf{n} = m \cdot \mathbf{A}_{*} \cdot m, \forall m, \mathbf{n}$. Это равенство, в свою очередь, выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_0 = \alpha\mathbf{E}$, где множитель α можно положить равным единице, т.к. у нас уже выделен скалярный множитель m . К сожалению, это рассуждение неправильно и равенство $\mathbf{A}_0 = \alpha\mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать. Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (12)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях t_0 , при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$. Формулы (12) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности. С учетом вышеприведенных рассуждений и (12) получаем, что тензор инерции \mathbf{A} равен единичному, а представление (11) принимает вид

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (13)$$

где скалярный множитель m называется массой тела–точки.

Представление (13) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. В самом деле, допустим, например, что тело-точка это электрон. Тогда все наше рассуждение теряет силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$ всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного. Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (13) является приемлемым, но для легких частиц, например, для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (11), где множитель m лучше уже не выделять. При использовании (11) массой тела-точки удобнее называть величину $1/3 \operatorname{tr}(\mathbf{m}\mathbf{A})$. К сожалению, здесь не время и не место обсуждать многочисленные нюансы, заключенные в представлении (11). В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ и (12). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (11) положительной определенности. Однако, возможно, что можно требовать выполнения только более слабого неравенства

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} K dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}: \quad |\mathbf{v}| \neq 0, \quad |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \quad (14)$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (11), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение 2.3.1: *число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела-точки и не зависящий от движения тела-точки, называется размерностью тела-точки.*

Размерность материальной точки равна единице $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, \mathbf{C} — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае, размерность частицы (11) равна 12, а тела-точки (13) — 10.

Определение 2.3.2: *количеством движения \mathbf{K}_1 тела-точки называется линейная форма скоростей*

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (15)$$

Определение 2.3.3: *кинетическим моментом \mathbf{K}_2^Q тела-точки, вычисленным относительно опорной точки Q , зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле*

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = m [(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (16)$$

Здесь первое слагаемое называется моментом количества движения тела–точки, а второе слагаемое, т.е. величина $\mathbf{m}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела–точки.

В заключение этого пункта приведем пример воображаемого тела–точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + q\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (17)$$

где m — масса тела–точки, J — момент инерции, q есть новый параметр, который не встречается в телах–точках, используемых в классической механике. Иными словами, параметр q определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером мы хотим подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, но они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело–точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “очарование”, “заряд” и т.д., то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Кинетическая энергия, по определению, является положительно определенной функцией своих аргументов. Положительная определенность формы (17) обеспечивается условиями

$$m > 0, \quad mJ - q^2 > 0.$$

Количество движения и кинетический момент тела–точки (17) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times (m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}) + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega}. \quad (18)$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забегав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения

$$m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega} = m\mathbf{V}_0 + q\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad \mathbf{R} \times \mathbf{a} + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{V}_0 + J\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}. \quad (19)$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(J - \frac{q^2}{m}\right) \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} + \frac{q\mathbf{a}}{m}\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1. \quad (20)$$

Решение этого уравнения ищем в виде прецессирующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (21)$$

Подставляя это выражение в (20) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q\mathbf{a}}{q^2 - mJ} \equiv \alpha \Rightarrow \varphi = \alpha t. \quad (22)$$

Интегрируя уравнения (19), нетрудно найти все искомые характеристики движения:

$$m\mathbf{R}(t) = (a - q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})t\mathbf{e} + q\alpha^{-1}\mathbf{e} \times \mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}]. \quad (23)$$

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{a} = q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости имеем выражение

$$m\mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e}) \cdot (\alpha\mathbf{e} - q\boldsymbol{\omega}_0). \quad (24)$$

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т.е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела–точки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные, возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее, они не более неправдоподобны, чем те “чудеса”, которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спинорных движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота \mathbf{Q} , а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела–точки.

3.2 Тела и их динамические структуры

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел-точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами–точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во-первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел-точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во-вторых, первичные тела–точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В-третьих, и это главная проблема, первичные тела–точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела–точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела–точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел-точек мы получили n первичных тел–точек. О том почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел-точек будет немного сказано при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего

времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать отдельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее, в данной работе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена выше. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова \mathbb{S}_t , которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на \mathbb{S}_t нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение 2.3.4: множество \mathfrak{M}_A тел-точек, находящихся внутри \mathbb{S}_t , называется телом A , а множество \mathfrak{M}_A^e тел-точек, находящихся вне \mathbb{S}_t , называется окружением тела A и обозначается A^e .

Объемом тела A называется объем, заключенный внутри \mathbb{S}_t , поэтому объем тела A не является физической (объективной) характеристикой тела A .

Определение 2.3.5: тело A называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением: в противном случае тело A называется открытым.

Аксиома T2: кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела A аддитивны по телам-точкам, составляющим тело A .

Пусть все характеристики i -го тела-точки снабжаются индексом i . Тогда в соответствии с аксиомой **T2** имеем

$$K(A) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_A} m_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right) = \sum_i m_i K_i, \quad (25)$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии. Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(A) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (26)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(A) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (27)$$

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение 2.3.6: совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом A , если выполняются следующие два условия. Первое: для любых пар точек A_i и A_m , принадлежащих телу A и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|. \quad (28)$$

Второе: тензоры поворота всех тел-точек одинаковы

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) = \mathbf{P}(t), \quad (29)$$

причем $\mathbf{P}(t)$ называется тензором поворота тела \mathcal{A} .

Из (28) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i(0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad (30)$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X , называемой полюсом, зафиксированным в теле \mathcal{A} . Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \implies \quad K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i(t)$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} в виде

$$K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m \dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(t)$, \mathbf{B}_X и \mathbf{C}_X — тензоры инерции тела \mathcal{A} , определяемые по формулам

$$\mathbf{B}_X = m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} = \mathbf{P}(t) \cdot [m (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{P}^T(t),$$

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{P}(t) \cdot \left\{ \sum_i m_i \left[(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \otimes (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \right] \right\} \cdot \mathbf{P}^T(t). \quad (32)$$

В (31)–(32) через m обозначена масса тела \mathcal{A} , через $\mathbf{R}_X(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела \mathcal{A}

$$m = \sum_i m_i, \quad \mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{R}_i(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела \mathcal{A} , то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор \mathbf{C} называется центральным тензором инерции. В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К.Трусделл и Р.Тупин [14] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но автор полагает, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (11), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т.е. вернуться к языку, которым пользовался Л.Эйлер.

4 Воздействия

4.1 Силы и моменты

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л.Эйлера [15]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями, и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, продолжая его на тела общего вида.

Основная аксиома механики: *в инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело A движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.*

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Аксиома F1: *в инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела A обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(A, A^e)$, действующей на тело A со стороны его окружения A^e .*

Аксиома F2: *в инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела A , вычисленного относительно опорной точки Q , обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^Q(A, A^e)$, действующим на тело A со стороны его окружения A^e .*

При этом момент $\mathbf{M}^Q(A, B)$, действующий со стороны тела B на тело A , вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}^Q(A, B) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(A, B) + \mathbf{L}^P(A, B), \quad (33)$$

где \mathbf{R}_Q определяет положение опорной точки Q ; вектор \mathbf{R}_P — определяет произвольно выбираемую точку B , называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^P(A, B)$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P , но не зависит от выбора опорной точки Q . Полный момент $\mathbf{M}^Q(A, B)$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

- а) сила $\mathbf{F}(A, B)$ — это реакция тела B на изменение положения тела A ;
- б) момент $\mathbf{L}^P(A, B)$ — это реакция тела B на повороты тела A вокруг точки приведения P .

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(A, B)$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением

тел \mathcal{A} и \mathcal{B} , 2) мысленно “заморозить” тело \mathcal{A} и превратить его в абсолютно твердое, 3) мысленно придавать всем точкам \mathcal{A} всевозможные бесконечно малые смещения $\xi\mathbf{e}$, где \mathbf{e} , произвольный единичный вектор. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным смещениям тела \mathcal{A} , то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление \mathbf{e}_* , что тело \mathcal{B} не препятствует смещению тела \mathcal{A} в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_* равна нулю. Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела \mathcal{A} , т.е. тело \mathcal{A} и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P ; 4) мысленно поворачивать тело \mathcal{A} вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi\mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным поворотам тела \mathcal{A} , то $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на \mathbf{e}_{**} , что тело \mathcal{B} не препятствует повороту тела \mathcal{A} вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_{**} равна нулю. Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (34)$$

Определение 2.4.1: пара векторов $\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$ называется воздействием тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} .

Определение 2.4.2: воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_P(t)$, что при любых движениях тела \mathcal{A} воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} определяется заданием пары векторов

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); (\mathbf{R}_P(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}, \quad (\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}), \quad (35)$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела \mathcal{A} . Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи. Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение 2.4.3: воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} называется чисто моментным, если $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело \mathcal{B} , так и по телам, составляющим тело \mathcal{A} .

Аксиома F3: сила $\mathbf{F}(A, B)$ и момент $\mathbf{M}^Q(A, B)$ аддитивны по отделенным телам C и D , составляющим тело B : $B = C \vee D$

$$\mathbf{F}(A, C \vee D) = \mathbf{F}(A, C) + \mathbf{F}(A, D), \quad C \wedge D = \emptyset; \quad (36)$$

$$\mathbf{M}^Q(A, C \vee D) = \mathbf{M}^Q(A, C) + \mathbf{M}^Q(A, D), \quad C \wedge D = \emptyset. \quad (37)$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^Q(A, B)$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (37). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^Q(A, C \vee D)$, $\mathbf{M}^Q(A, C)$, $\mathbf{M}^Q(A, D)$ может производиться независимо.

Аксиома F4: сила $\mathbf{F}(A, B)$ и момент $\mathbf{M}^Q(A, B)$ аддитивны по отделенным телам C и D , составляющим тело A : $A = C \vee D$

$$\mathbf{F}(C \vee D, B) = \mathbf{F}(C, B) + \mathbf{F}(D, B), \quad C \wedge D = \emptyset; \quad (38)$$

$$\mathbf{M}^Q(C \vee D, B) = \mathbf{M}^Q(C, B) + \mathbf{M}^Q(D, B), \quad C \wedge D = \emptyset. \quad (39)$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

Примечания.

1 В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно сказанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

2. Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

4.2 Статика абсолютно твердого тела

В качестве простой иллюстрации применения понятий сил и моментов сформулируем необходимые условия равновесия абсолютно твердого тела.

Утверждение: если абсолютно твердое тело A находится в покое (в равновесии), то внешние сила и момент, действующие на него, равны нулю, т.е.

$$\mathbf{F}(A, A^e) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^Q(A, A^e) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(A, A^e) + \mathbf{L}^P(A, A^e). \quad (40)$$

При выполнении этих условий абсолютно твердое тело может совершать движение, сохраняющее его количество движения и кинетический момент. Чтобы исключить эти движения, необходимо принять дополнительное требование об отсутствии движения тела в какой-либо момент времени. При практическом использовании условий равновесия целесообразно применять аксиомы аддитивности.

Пример: дано абсолютно твердое тело A , к точкам B и C которого прикреплены тонкие нити, передающие силы \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_C ; выяснить, при каких ограничениях на силы \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_C тело A находится в равновесии.

Воздействия передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их прикрепления к телу

А. Таким образом, имеем $A^e = B \vee C$. Первый закон статики требует, чтобы сила $\mathbf{F}(A, A^e)$ обращалась в нуль. Поэтому имеем равенство

$$\mathbf{F}(A, A^e) = \mathbf{F}(A, B \vee C) = \mathbf{F}(A, B) + \mathbf{F}(A, C) \equiv \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (41)$$

При вычислении момента используем аксиому аддитивности

$$\mathbf{M}^Q(A, A^e) = \mathbf{M}^Q(A, B \vee C) = \mathbf{M}^Q(A, B) + \mathbf{M}^Q(A, C), \quad (42)$$

где Q есть выбранная опорная точка. Для простоты совместим ее с началом в системе отсчета. В таком случае будем опускать символ опорной точки в обозначениях. При вычислении момента $\mathbf{M}^Q(A, B)$ необходимо сначала выбрать точку приведения. Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку P , не совпадающую с точкой закрепления нити B , то собственный момент $\mathbf{L}^P(A, B)$ будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело A вокруг точки P , то нить B будет препятствовать этому повороту. Это и означает, что $\mathbf{L}^P(A, B)$ отличен от нуля. Если же в качестве точки приведения выбрать точку B , то собственно момент $\mathbf{L}^B(A, B)$ будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента $\mathbf{M}^Q(A, C)$. Окончательно получаем равенство

$$\mathbf{M}^O(A, A^e) = \mathbf{M}^O(A, B) + \mathbf{M}^O(A, C) = \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (43)$$

Внешне это выражение не совпадает с (33), но оно легко преобразуется к виду (33). При этом легко убедиться, что не существует такой точки приведения, чтобы собственно момент $\mathbf{L}^P(A, A^e)$ равнялся нулю. Это означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения A^e на тело A не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (41) – (43), получаем

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_C, \quad \mathbf{F}_B = \lambda(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B), \quad (44)$$

где величина λ остается произвольной. Если величина λ положительна, то положение равновесия устойчиво. Если величина λ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, разумеется, нужно доказывать отдельно.

5 Полная и внутренняя энергии

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г.В.Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т.е. не было самостоятельной структурой. В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839г. Дж.Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред, а уравнение баланса энергии стало независимым от законов движения постулатом. Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г.Гельмгольца

[16] и А.Пуанкаре [5]. Однако итог этого анализа не вполне удовлетворителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. Цель данного пункта не в прояснении концепции энергии, а в подчеркивании роли энергии, как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела \mathcal{A} есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Уже само существование тел в виде не распадающихся объектов указывает на присущее им “нечто”, что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это “нечто” можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела \mathcal{A} представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \quad (45)$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела \mathcal{A} и требует определения. Если внутренняя энергия определена, то и полная энергия тела определена. Часто различие между кинетической и внутренней энергиями тела \mathcal{A} сводят к простому утверждению, что кинетическая энергия есть часть полной энергии, зависящая от скоростей тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} , а внутренняя энергия есть часть полной энергии, зависящая от положений тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} . Во многих случаях подобное разделение оказывается приемлемым и не ведет ни к каким неприятностям. Однако принятие этой точки зрения резко сужает область применимости механики и потому совершенно неприемлемо в фундаментальном плане. Качественное различие понятий кинетической и внутренней энергии состоит в следующем. Кинетическая энергия — это та часть полной энергии, которая зависит от выбора системы отсчета и потому не является физической (объективной) характеристикой тела. Внутренняя энергия — это та часть полной энергии тела, которая не зависит от выбора системы отсчета и связана с самим телом. Образно говоря, внутренняя энергия как бы заморожена в тело и перемещается вместе с ним. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о любых системах отсчета, т.е. инерциальность системы отсчета не подразумевается. Внутренняя энергия характеризует способность тела запасать энергию внутри самого себя. Например, внутренняя энергия материальной точки постоянна и не меняется при ее движениях. То же самое можно сказать об абсолютно твердом теле. Внутренняя энергия тела, состоящего из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной, с точностью до постоянной величины равна энергии деформации пружины. Это простые примеры. Чтобы прояснить (или запутать) более сложную ситуацию, рассмотрим следующий идеализированный пример. Допустим, тело \mathcal{A} состоит из $2n$ атомов водорода и n атомов кислорода, причем атомы рассматриваются как материальные точки (в этом и состоит идеализация). Между атомами действуют некие силы, которые потенциальны. Полная энергия этого тела есть сумма кинетических энергий всех атомов и потенциала внутренних сил. Иными словами, внутренняя энергия этого тела равна потенциалу внутренних сил. С другой стороны, известно что два атома водорода объединяются с одним атомом кислорода и образуют молекулу воды, которую, в свою очередь, можно рассматривать как материальную точку (еще одна идеализация). По-

этому тело \mathcal{A} можно рассматривать как состоящее из n тел-точек (молекул воды), между которыми действуют потенциальные силы. В этом случае полная энергия тела \mathcal{A} есть сумма кинетических энергий молекул и потенциала внутренних сил. Понятно, что полные энергии тела \mathcal{A} в обоих случаях должны совпадать, хотя и кинетические энергии, и внутренние энергии тела \mathcal{A} в этих двух подходах будут различаться самым существенным образом. В этом примере мы видим, что разделение полной энергии на кинетическую и внутреннюю не носит абсолютного характера. Отсюда и многочисленные проблемы, связанные с принятием формальных определений для энергии.

Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома Е1: *внутренняя энергия тела \mathcal{A} зависит только от конфигурации тела \mathcal{A} , т.е. только от векторов положения \mathbf{R}_i и тензоров поворота \mathbf{P}_i тел-точек \mathcal{A}_i , составляющих тело \mathcal{A}*

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \dots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N). \quad (46)$$

Аксиома Е2: *внутренняя энергия тела \mathcal{A} аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело \mathcal{A}*

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\bigvee_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varphi_{i,k}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k), \quad \varphi_{i,i}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i) = 0. \quad (47)$$

Эта аксиома часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (46). Не доказано, но по всей видимости аксиома (47) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий. Следует обратить внимание на тот факт, что внутренняя энергия тела \mathcal{A} , в отличие от его кинетической энергии, не аддитивна по телам, составляющим тело \mathcal{A} .

Аксиома Е3а: *внутренняя энергия тела \mathcal{A} является индифферентным скаляром, т.е. она не зависит от выбора системы отсчета.*

Аксиома Е3б: *внутренняя энергия тела \mathcal{A} не изменится, если на движение тела \mathcal{A} наложить дополнительное движение тела \mathcal{A} , как жесткого целого.*

Последние две аксиомы эквивалентны. Следствием аксиом Е1–Е3 являются утверждения:

а) *внутренняя энергия тела \mathcal{A} , являющегося системой материальных точек, по необходимости имеет вид*

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varphi_{i,k}(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|). \quad (48)$$

б) *внутренняя энергия тела \mathcal{A} , состоящего из тел-точек общего вида, по необходимости имеет вид*

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varphi_{i,k}(\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k); \mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k). \quad (49)$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (49), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\Psi_{i,k}$ в (48) приведем такую

$$\Psi(r) = \Psi_0 e^{-r_0/r} \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^m - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \right], \quad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|. \quad (50)$$

где Ψ_0 , r_0 , r_1 , m , n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние не однотипны.

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и обе весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (50) переходит в потенциал Леннарда–Джонса. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (50) вновь совпадает с потенциалом типа Леннарда–Джонса. На первый взгляд потенциал типа (50) кажется странным, т.к. он допускает “слипание” тел-точек. Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев сильно помогает. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, т.к. они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений. Поэтому здесь мы ограничимся приведенными выше намеками.

В заключении этого пункта примем

Определение 2.5.1: *мощностью внешних воздействий на тело \mathcal{A} , состоящего из тел-точек \mathcal{A}_i , называется билинейная форма скоростей и воздействий*

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} \left[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right]. \quad (51)$$

Обратим внимание, что здесь включены силы и моменты, действующие на тело–точку со стороны окружения всего тела \mathcal{A} , а не со стороны \mathcal{A}_i^e , т.е. окружение i -го тела–точки. Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбран вектор положения \mathbf{R}_i тела–точки \mathcal{A}_i , причем, напомним, $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q .

6 Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают два закона динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения и уравнение баланса кинетического момента) и два начала термодинамики, к которым относятся уравнение баланса энергии и второе начало термодинамики, не имеющее другого общепринятого наименования. Все эти законы суть некие логические утверждения, которые не вытекают из опыта и потому не могут быть опровергнуты опытным путем. Иными словами, фундаментальные законы отнюдь не являются законами Природы типа закона Всемирного тяготения. Фундаментальные законы — суть метод изучения Природы. При дальнейшем развитии механики существующие формулировки фундаментальных законов могут измениться, но не потому что неправильны, а потому что могут быть найдены их более эффективные выражения. Можно утверждать, что фундаментальные законы механики действуют на всех уровнях от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы суть следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

6.1 Уравнение баланса количества движения

Формулировка первого закона динамики Эйлера: скорость изменения количества движения тела A равна силе $\mathbf{F}(A, A^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(A)$ в тело A

$$\dot{\mathbf{K}}_1(A) = \mathbf{F}(A, A^e) + \mathbf{k}_1(A). \quad (52)$$

Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(A)$, как правило, равна нулю. Для материальной точки уравнение (52) есть второй закон Ньютона. Для закрытых тел уравнение (52) называют первым законом динамики Эйлера, открытым им в 1750 году. Из (52) и аддитивности по телам количества движения и сил немедленно следует третий закон Ньютона $\mathbf{F}(A, B) = -\mathbf{F}(B, A)$. Обратим внимание, что это равенство ничего не говорит о направлении силы $\mathbf{F}(A, B)$. Уравнение И.В.Мещерского есть просто запись уравнения (52).

Замечание: в физике весьма популярно мнение, что силой называется то, что стоит в правой части уравнения (52). Это заблуждение является источником многих недоразумений. Например, многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. Однако в эйлеровой механике третий закон Ньютона уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Противоречие возникает из-за того, что в микромире часто нельзя игнорировать скорость подвода количества движения в тело. Поэтому правую часть уравнения (52) нельзя называть силой.

У начинающих часто возникает затруднение с тем, как следует вычислять скорость подвода количества движения в тело. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя на интуитивном уровне он вполне очевиден. Поэтому ограничимся двумя простыми примерами.

Пример: погрузка движущейся тележки

Пусть по рельсам движется тележка со скоростью $\mathbf{v}(t)$. При этом на тележку насыпается, например, песок. Поэтому масса $m(t)$ тележки с песком меняется во времени. Считаем, что на тележку никаких сил не действует. Это, в частности, означает, что колея прямолинейна, и трение в подшипниках колес отсутствует. Нужно найти скорость движения тележки.

Первый закон динамики записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{dm(t)}{dt}\mathbf{u}(t), \quad (53)$$

где $dm(t)/dt$ есть скорость подвода массы, а $\mathbf{u}(t)$ есть абсолютная скорость, с которой масса $dm(t)$ подводится к тележке. Задачу можно немного усложнить. Пусть на тележку насыпается песок двух сортов. Тогда вместо (53) будем иметь следующее уравнение

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \rho_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \rho_2(t)\mathbf{u}_2(t), \quad \frac{dm(t)}{dt} = \rho_1 + \rho_2, \quad (54)$$

где ρ_1, ρ_2 суть скорости подвода массы песка первого и второго сортов соответственно, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ суть скорости, с которыми упомянутые массы подводятся к тележке. Движение тележки существенно зависит от подводимого к ней количества движения.

Например, если песок подается из неподвижного (падает сверху в тележку) источника, то $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Если песок подается с вертолета, летящего над тележкой с той же скоростью, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. В первом случае скорость тележки будет уменьшаться с ростом ее массы, а во втором случае будет сохраняться неизменной. Можно, разумеется, и разгонять тележку, сбрасывая с нее песок с подходящей скоростью (реактивное движение).

Пример: задача Кейли

Чтобы еще немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке — см. стр.114 учебника [10]. В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи. В качестве тела A выбираем свисающую часть цепи, а через x обозначим ее длину. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left(\rho x \frac{dx}{dt} \right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt} \frac{dx}{dt}, \tag{55}$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи. Отметим, что в уравнении, используемом Кэйли, два последних слагаемых в правой части отсутствуют. Покажем, что так и должно быть. Уравнение (55) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе

$$\frac{d}{dt} [\rho (L - x) 0] = F + \frac{d\rho (L - x)}{dt} \frac{dx}{dt} \Rightarrow F = \rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \tag{56}$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (55), приходим к уравнению, использованному Кэйли без должного обоснования. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т.е. примем следующие начальные условия

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0 \Rightarrow x = g t^2 / 6. \tag{57}$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [10]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (57), но любители парадоксов идут дальше. Выясним сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1 , когда $x = L$, т.е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \rho g L^2 / 2, \quad K_1 = \rho g L^2 / 3 \Rightarrow P_1 + K_1 = 5 \rho g L^2 / 6 \neq P_0 = \rho g L^2. \tag{58}$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho g L^2 / 6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости \dot{x} , т.е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения. Менее

тривиален вопрос о правильной записи уравнения баланса энергии в этой задаче. Собственно, именно в этом пункте и возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Через \mathcal{U} обозначим массовую плотность внутренней энергии цепи, т.е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $d\mathcal{U} = \rho dx \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна. Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho x \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} - F \frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho x)}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{U} \right]. \quad (59)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (59) для решения (57) тождественно выполняется. Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho L \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} + \delta. \quad (60)$$

Здесь δ есть скорость подвода энергии в цепочку. Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\Delta = \int_0^{t_1} \delta dt = \left[\frac{1}{2} \rho x \dot{x}^2 \right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2} \rho g x^2 \right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6} \rho g L^2, \quad (61)$$

где использовано решение (57). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “не механического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее, мы говорим, что энергия (61) рассеялась в окружающую среду в форме тепла. Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным выше примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им истолкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще и механика открытых систем в частности всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

6.2 Уравнение баланса кинетического момента

Формулировка второго закона динамики Эйлера: скорость изменения кинетического момента тела A , вычисленного относительно опорной точки Q , равна

моменту $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода кинетического момента $\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})$ в тело \mathcal{A}

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}). \quad (62)$$

Этот закон для закрытых тел ($\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$) впервые был открыт Л.Эйлером в 1776 году и носит название второго закона динамики Эйлера. В менее отчетливой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 году при формулировке уравнений динамики твердого тела. Как ни странно, но и в настоящее время второй закон динамики Эйлера, как фундаментальный постулат механики, не формулируется в существующих учебниках физики и механики. Относить этот закон к разряду теорем, как это считал Лагранж, разумеется нельзя. Если два закона динамики Эйлера применить к системе материальных точек, то они позволяют доказать, что внутренние силы в такой системе по необходимости являются центральными, т.е. направлены по линиям, соединяющим материальные точки. Поэтому в ньютоновской механике систем материальных точек никаких сил, кроме центральных, не существует. Экспериментально доказано, что силы между ионами в кристаллах не являются центральными. Это означает, что ионы, в общем случае, нельзя моделировать материальными точками. В качестве иллюстрации использования второго закона динамики рассмотрим простые примеры.

Пример: движение абсолютно твердого тела в центральном поле тяготения.

Пусть в начале инерциальной системы отсчета расположено точечное тело с массой M . Пусть в поле тяготения этого тела движется абсолютно твердое тело \mathcal{A} с массой m . Центральный тензор инерции тела \mathcal{A} считается трансверсально изотропным и в отсчетном положении имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (63)$$

где λ, μ суть осевой и экваториальный центральные моменты инерции тела \mathcal{A} соответственно. Количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} задаются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \quad (64)$$

где \mathbf{R}, \mathbf{P} суть вектор положения центра масс тела \mathcal{A} и тензор поворота тела \mathcal{A} соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ есть угловая скорость тела \mathcal{A} , которая связана с тензором поворота тела \mathcal{A} уравнением Пуассона (9). В качестве опорной точки при вычислении кинетического момента выбрано начало в системе отсчета. Запишем теперь первые два закона динамики для тела \mathcal{A} .

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = -G \frac{Mm}{R^3} \mathbf{R}, \quad (65)$$

где G есть универсальная гравитационная постоянная. Уравнение (65) имеет четыре интеграла движения (один скалярный и один векторный). Скалярный интеграл называется интегралом энергии трансляционного движения. Он получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (65) на вектор $\dot{\mathbf{R}}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} - G \frac{mM}{R} = \varepsilon_T = \text{const}, \quad (66)$$

где \mathcal{E}_T будем называть энергией трансляционного движения тела A . Векторный интеграл, называемый законом сохранения момента количества движения, получается после векторного умножения обеих частей уравнения (65) на вектор \mathbf{R} и имеет вид

$$\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H} = \text{const} \quad \implies \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (67)$$

Из последнего равенства видно, что траектория центра масс тела A лежит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{H} и называемой плоскостью эклиптики. Решение задачи (65)–(67) может быть найдено во всех учебниках механики и здесь опускается.

Уравнение баланса кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \right) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учетом интеграла (67) получаем еще один векторный интеграл, фиксирующий сохранение динамического спина тела A . Этот интеграл дается выражением

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} = \text{const}. \quad (68)$$

Сохранение динамического спина элементарных частиц, очевидно, должно играть огромную роль в квантовой физике, если бы она учитывала в явном виде спиновые движения. Но, к сожалению, в настоящее время этого нет. Равенство (68) можно переписать в обращенной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \quad (69)$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением Пуассона позволяет найти угловую скорость и повороты тела A . Разумеется к этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \implies \quad \mathbf{L} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (70)$$

Здесь мы приняли, что в качестве отсчетного положения тела A выбрано его начальное положение. Решение задачи (69)–(70) рассмотрим немного подробнее. Нетрудно убедиться, что уравнение (69) допускает интеграл, который выражает закон сохранения энергии спирного движения. Подчеркнем, что его нельзя называть законом сохранения вращательного движения, поскольку часть энергии вращательного движения, т.е. энергия трансляционного движения тела A вокруг центра притяжения, уже вошла в интеграл (66). Энергия спирного движения вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \quad (71)$$

Вычисляя производную по времени от энергии \mathcal{E}_S и учитывая уравнение (69), немедленно убеждаемся, что энергия спирного движения \mathcal{E}_S сохраняется неизменной. Всякий тензор поворота, как хорошо известно, выражается через три параметра. Например, через углы Эйлера. Общая теорема о представлении тензора поворота через три параметра доказана в работе [12]. Закон сохранения энергии спирного движения $\mathcal{E}_S = \text{const}$ показывает, что три вышеупомянутые параметра должны удовлетворять одному скалярному равенству (71). В результате, тензор поворота, тождественно

удовлетворяющий закон сохранения энергии спиного движения, может быть выражен через два произвольных параметра. Введем обозначение

$$\mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{m}(t)) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E} \quad (72)$$

для поворота на угол φ вокруг вектора \mathbf{m} . Тогда искомый двухпараметрический тензор поворота может быть выражен в виде композиции двух поворотов

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}), \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{L}/|\mathbf{L}| = \text{const}, \quad (73)$$

где угол собственного вращения φ задает вращение вокруг оси изотропии \mathbf{e} тела A , а угол прецессии ψ задает прецессию тела A вокруг постоянного вектора динамического спина \mathbf{L} . Подстановка (73) в (71) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S &= \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{L} = \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \text{const}. \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь учтены очевидные тождества

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}) = \mathbf{e}.$$

Вычисляя угловую скорость композиции поворотов (73), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot (\dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{e}) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (75)$$

Подставляя выражение (75) в уравнение (69) и умножая обе части получившегося уравнения на $\mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m})$ слева, получаем

$$\dot{\psi}\mathbf{L} + \dot{\varphi}\mathbf{e} = \mathbf{l}\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{l} = \sqrt{\mu^2\omega_0^2 + (\lambda^2 - \mu^2)(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})^2}, \quad (76)$$

где \mathbf{l} есть модуль вектора \mathbf{L} . Решение уравнения (76) находится элементарно и имеет вид

$$\psi = \frac{\mathbf{t}\mathbf{l}}{\mu}, \quad \varphi = \frac{\mathbf{t}(\mu - \lambda)}{\mu}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{\mathbf{t}(\mu - \lambda)}{\lambda\mu}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}). \quad (77)$$

Таким образом, мы видим, что ось тела A прецессирует вокруг вектора динамического спина

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{e}' \cdot \mathbf{L} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \quad (78)$$

с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг собственной оси, причем угол между осью тела и вектором его динамического спина сохраняется неизменным.

Применим теперь полученные результаты к описанию вращения Земли. Это справедливо в при пренебрежении влиянием Луны и гравитационного момента от Солнца. Как известно, моменты инерции Земли различаются весьма незначительно

$$\lambda \simeq 1,0033 \mu.$$

К сожалению, автор не знаком с деталями наблюдений по изучению вращения Земли и потому не в состоянии судить о степени их точности. Много полезных сведений о движении Земли можно найти в книге [13]. Поскольку вектор динамического спина постоянен, то он фиксирован относительно плоскости эклиптики. Считается [13], что ось Земли также фиксирована относительно плоскости эклиптики и составляет с ней угол $66^{\circ}33'$. Согласно (78) одновременная фиксация и динамического спина, и оси Земли возможна тогда и только тогда, когда вектор динамического спина направлен строго по оси Земли. В таком случае имеем

$$\mathbf{L} = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e} = \text{const}, \quad l = |\mathbf{L}| = \lambda \omega_0, \quad (79)$$

и различие между углами прецессии ψ и собственного вращения φ теряет смысл. Физически интерпретируема только сумма этих углов, равная, конечно, величине $t\omega_0$. С другой стороны, имеются сведения о том, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется. Обычно это объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Но, в дополнение к этому объяснению, существует и другая причина, по которой ось Земли может колебаться. Действительно, допустим, что направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли. В этом случае ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. Модуль вектора угловой скорости будет оставаться постоянным, но сам вектор угловой скорости будет также прецессировать вокруг вектора динамического спина. При этом смена суток на Земле будет определяться не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси, как это видно из формул (77).

Пример: реакция в опоре свободно вращающегося тела. Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна точка которого неподвижно закреплена и никаких сил, кроме реакции в опоре, на тело не действует. Эта задача мало отличается от рассмотренной выше, но мы хотим обратить внимание на одну ее особенность. Запишем уравнения движения.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{F}, \quad (80)$$

где вектор \mathbf{R} определяет положение центра масс относительно неподвижной точки, сила \mathbf{F} есть реакция в неподвижной точке. Уравнение (80) служит для нахождения реакции в опоре. По основной теореме кинематики имеем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}, \quad (81)$$

где вектор \mathbf{r} задает положение центра масс тела в отсчетном положении. Для нахождения тензора поворота \mathbf{P} необходимо записать второй закон динамики. Имеем

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega})' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \text{const}, \quad (82)$$

где тензор инерции \mathbf{C} вычислен относительно неподвижной точки и является трансверсально изотропным. Решение задачи (82) при заданных начальных условиях ничем

не отличается от решения (73)–(77), построенного в предыдущем примере. Используя (80), вычислим реакцию в опоре

$$\mathbf{F} = m \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\psi}(\mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{e})] \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}. \quad (83)$$

В выражении (83) использованы обозначения, принятые в (73)–(77). Как видим реакция в опоре вычисляется по довольно сложной формуле, причем ее направление меняется во времени и не совпадает с направлением вектора \mathbf{R} , определяющего положение центра масс. Вообразим теперь, что мы в состоянии измерять реакцию опоры и наблюдать вращательное движение тела. Допустим также, что мы ничего не знаем о втором законе динамики Эйлера. Возьмем далее два тела с одинаковыми тензорами инерции и зададим для них одинаковые начальные условия. В этом случае наблюдаемые движения этих двух тел будут совершенно одинаковыми. В то же время измеряемые реакции опор у этих тел могут быть совершенно разными, поскольку реакции зависят от положения центра масс в теле. Но центры масс у тел с одинаковыми тензорами инерции могут находиться в различных точках тела, причем движение центров масс не контролируемо. Если мы стоим на позициях ньютоновой механики, то возникающая ситуация покажется нам парадоксальной, ибо наблюдаемые движения не определяют измеряемые силы. Для объяснения этого факта мы начнем придумывать некие вероятностные трактовки и говорить о нарушениях законов классической механики. Нечто похожее как раз и происходит в микромире. Современная физика для описания подобных явлений использует вероятностные законы квантовой физики.

6.3 Первое и второе начала термодинамики

В механике дискретных систем не обсуждаются такие понятия, как внутренняя энергия, тепло, температура, энтропия. Поэтому и основные законы термодинамики остаются за рамками классической механики. Вместе с тем, в механике сплошных сред законы термодинамики играют весьма важную роль. В результате, при переходе от дискретных систем к сплошным средам возникает некий логический разрыв, поскольку приходится вводить понятия, чуждые детерминированной механике дискретных систем. В данной работе общая концепция законов термодинамики не обсуждается. Тем не менее, кажется целесообразным ввести основные понятия термодинамики на элементарных примерах механики дискретных систем.

Если бы нас интересовали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия как внутренняя энергия, тепловая энергия, температура и энтропия. Собственно, понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, где внутренняя энергия вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже не всегда возможно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее, их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред

эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики. В данной работе используются упрощенные формулировки, которые имеют своей целью на простых примерах пояснить такие основные понятия термодинамики как внутренняя энергия, температура и энтропия. В частности, понятие энтропии, используемое ниже, отличается от известных определений¹.

Уравнение баланса энергии или первый закон термодинамики: *скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “не механического происхождения”, обычно в форме тепла.*

Дать общее и строгое определение понятию энергии “не механического происхождения” затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия не механического происхождения — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним сказанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x . Рассмотрим две похожих ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} c (x_1 - x_2)^2, \quad (84)$$

где c есть жесткость пружины. Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по разному

$$1. \quad \dot{E} = -b_1 \dot{x}_1^2 - b_2 \dot{x}_2^2; \quad 2. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2, \quad (85)$$

где постоянные коэффициенты b_1 , b_2 , b называются коэффициентами вязкости. В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии “не механического происхождения” отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии “не механического происхождения”. При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Каждое уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение новое понятие. В первом законе динамики впервые вводится понятие силы. Во втором законе динамики вводится новое понятие момента, не сводящегося к понятию момента силы. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение сразу два новых понятия: внутреннюю энергию и скорость подвода энергии в систему. Немного ниже мы покажем, что и такие понятия, как температура и энтропия также вводятся посредством специальной математической формулировки уравнения баланса энергии.

Обсуждение уравнения баланса энергии проведем на элементарном примере двух грузиков, соединенных безынерционной пружиной общего вида. Предварительно рассмотрим случай одной материальной точки. При обычной трактовке подвод энергии “не механического происхождения” к материальной точке невозможен. Поэтому урав-

¹Энтропия, видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

нение баланса энергии для нее имеет простейший вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (86)$$

где U есть внутренняя энергия, \mathbf{F} есть сила, действующая на материальную точку. Вычисляя производную по времени в левой части уравнения (86) и учитывая первый закон динамики $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$, получаем, что внутренняя энергия материальной точки постоянна. Именно поэтому в классической механике внутренняя энергия исключается из рассмотрения. Между прочим, в упомянутой постоянной энергии заключаются огромные энергии, например, атомная энергия. Ситуация изменилась бы, если бы мы захотели рассматривать распад одной частицы на несколько новых частиц. В таком случае внутренняя энергия перестала бы быть неизменной. При этом игнорировать скорость подвода энергии уже было бы нельзя. Рассмотрим теперь тело, состоящее из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной. Допустим, что внутри этого тела возможны потери энергии, например, из-за наличия демпфера между частицами. Запишем уравнение баланса энергии для рассматриваемого тела

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + U \right) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \delta, \quad (87)$$

где U есть внутренняя энергия рассматриваемого тела, δ есть скорость подвода энергии в систему, а $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — суть внешние силы, действующие на первую и вторую частицы соответственно. Подчеркнем, что в силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ не входят внутренние силы. В данном случае, внутренние силы — это силы, действующие на частицы со стороны пружины, а также силы внутреннего трения. Уравнение баланса энергии (87) можно переписать в эквивалентном виде

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dot{U} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \delta. \quad (88)$$

Уравнение (88) следует еще немного преобразовать и исключить из него внешние силы, поскольку они ни в какой степени не характеризуют рассматриваемую систему. Для этого выпишем уравнения движения (первый закон динамики) для обеих частиц в отдельности и для всего тела.

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{1i}, \quad m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{2i}, \quad m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (89)$$

где $\mathbf{F}_{1i}, \mathbf{F}_{2i}$ суть внутренние силы, действующие на первую и вторую частицы соответственно. Складывая первые два уравнения системы (89) и учитывая третье уравнение, получаем

$$\mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{2i} = \mathbf{0}. \quad (90)$$

Это аналог третьего закона Ньютона. С учетом уравнений (89) и (90) уравнению баланса энергии (88) можно придать следующий вид

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1i} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (91)$$

Это уравнение носит название приведенного уравнения баланса энергии. Его существенное отличие от (88) состоит в том, что в него не входят никакие внешние

параметры. Поэтому приведенное уравнение баланса энергии характеризует саму рассматриваемую систему и оказывается удобным для дальнейшего анализа. Но предварительно следует сказать еще несколько слов о понятии внутренней энергии.

По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, *обязана зависеть* от неких относительных скоростей игнорируемых нами переменных. Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время, известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно средних положений, которые и воспринимаются нами, как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то и в этом случае осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Короче говоря, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И эта игнорируемая нашими моделями часть Вселенной всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на ее внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т.е. от положений частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого энтропией \mathcal{H} . Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических, свойствами.

Вернемся теперь к приведенному уравнению баланса энергии (91). Примем, что внутренняя энергия рассматриваемого тела зависит от векторов положений частиц тела и энтропии. Используя принцип независимости от выбора системы отсчета, нетрудно доказать, что внутренняя энергия рассматриваемого тела есть функция вида

$$U = U(\gamma, \mathcal{H}), \quad \gamma \equiv |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2, \quad (92)$$

где параметр \mathcal{H} будем называть энтропией. Внутренние силы представим в виде суперпозиции

$$\mathbf{F}_{1i} = \mathbf{F}_{1e}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathcal{H}) + \mathbf{F}_{1d}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_2, \mathcal{H}). \quad (93)$$

Теперь приведенное уравнение баланса энергии (91) можно переписать в виде

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' - \mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (94)$$

Левая часть этого равенства является полной производной по времени от внутренней энергии. Следовательно, и левая часть (94) должна быть полной производной. Чтобы

получить полную производную введем в рассмотрение новую неизвестную переменную ϑ , которую в дальнейшем будем называть температурой, посредством равенства

$$\vartheta \dot{H} = -\mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (95)$$

Следует подчеркнуть, что равенство (95) не требует принятия никаких новых допущений. Правда, остается пока неясным, можно ли назвать введенный параметр ϑ температурой. Проблема в том, что, например, в статистической физике температура вводится посредством вполне определенных рассуждений, которые невозможно увязать с принятым выше способом введения температуры. В данной работе мы лишены возможности провести детальное обсуждение этого трудного вопроса. Поэтому ограничимся декларацией о том, что принятый способ введения температуры, в принципе, согласуется с механикой сплошных сред и классической термодинамикой.

Аналог уравнения (95) в механике сплошных сред носит название уравнения теплопроводности. Подставив (95) в приведенное уравнение баланса энергии (94), получим равенства

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \vartheta \dot{H} \Rightarrow \mathbf{F}_{1e} = 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial H}. \quad (96)$$

Последними двумя равенствами определяются сила упругости, возникающая при деформации пружины, и температура, если считать, что внутренняя энергия системы каким-то образом задана. Конкретный вид внутренней энергии зависит от физических свойств системы и может быть установлен только на основе интуитивных представлений, включающих знание основных экспериментальных данных. Если энтропию считать не имеющей физической размерности, то температура будет иметь смысл энергии, которую обычно называют тепловой. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится. По смыслу своего введения *температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы*. В рассматриваемом нами примере о двух грузиках, соединенных пружиной и демпфером, мы имеем

$$\mathbf{F}_{1d} = -b (\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2),$$

где b постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкости демпфера. Подставив это выражение в уравнение производства тепла (95), получим

$$\vartheta \dot{H} = b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 + \delta. \quad (97)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (95) есть тепло, вырабатываемое в системе в единицу времени, а второе слагаемое в правой части есть тепло, излучаемое системой в единицу времени в окружающую среду. Таким образом, вся правая часть уравнения (97) есть тепло, накапливаемое телом в единицу времени. Мощность излучения δ , вообще говоря, уже не определяется только свойствами тела, но зависит также и от свойств (например, температуры) окружающей среды. Определение функции δ есть отдельная задача. Примем, например, следующее определяющее уравнение для мощности излучения

$$\delta = -\eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (98)$$

где коэффициент η показывает какая часть вырабатываемой в теле мощности излучается в окружающую среду. Второе из уравнений (85) записано для случая $\eta = 1$, когда энтропия системы сохраняется постоянной, как это следует из (97). Подставив (98) в (97), получим уравнение для производства тепла в следующем виде

$$\vartheta \dot{H} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2. \quad (99)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что в правую часть (97) не вошли характеристики вязкого трения частиц о внешнюю среду. Упомянутые характеристики входят во внешние силы и потому исключаются из приведенного уравнения баланса энергии. Ситуация может показаться странной, поскольку, как известно, тело нагревается при трении о внешнюю среду. Однако этот нагрев должен учитываться введением некоего механизма внутри материальных точек, чтобы сделать их способными накапливать тепло.

Уравнение (99) служит для определения температуры в теле. Но само по себе оно недостаточно, ибо содержит две неизвестных функции: температуру ϑ и энтропию H . Для замыкания этого уравнения необходимо дополнительное уравнение, связывающее температуру и энтропию. Трудность состоит в том, что энтропия является неизмеряемым параметром. По существу, она служит только для того, чтобы правильно определить температуру. Примем, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ есть измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию H . Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры²

$$\vartheta = \vartheta(H) = c^{-1} H \quad \Rightarrow \quad H = c \vartheta, \quad (100)$$

где c есть экспериментально определяемый параметр. Подставляя (100) в (99), находим температуру

$$c \vartheta \dot{\vartheta} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \Rightarrow \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2(1 - \eta)b}{c} \int_0^t (|\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 dt) \right]^{1/2},$$

где ϑ_0 есть начальная температура. Если наблюдаемые экспериментальные данные удается удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c , то определяющее уравнение (100) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение. Если принять определяющее уравнение (100), то уравнение баланса энергии рассматриваемой системы запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2 - \eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \Rightarrow \\ &\frac{d}{dt} \left(E + \frac{\eta c \vartheta^2}{2(1 - \eta)} \right) = -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2. \end{aligned}$$

²Сейчас мы не заботимся о действительном соответствии этого уравнения реальности, а хотим продемонстрировать только идею нахождения температуры

Это равенство справедливо только при $\eta \neq 1$. На рассмотренном примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т.е. энергия движения игнорируемых степеней свободы.

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т.е. в неучитываемую нами, Вселенную. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии. Более того, маловероятно, что в ближайшем будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом. Второе начало термодинамики имеет очень много различных формулировок. В общих чертах, второе начало термодинамики утверждает, что в реальности не существует изолированных систем. Иными словами, всякая система неизбежно излучает часть своей энергии в окружающую среду.

Общая формулировка второго закона термодинамики: *тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду.*

Следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т.е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии. Фактически в рациональной механике под вторым законом термодинамики понимают совокупность неких утверждений, выражающих интуитивные представления о поведении реальных систем. Примером представления такого рода является следующее рассуждение. Выше мы рассматривали две материальные точки, соединенные пружиной. При этом допускалось, что эта система способна существовать сколь угодно долго. Подобное допущение справедливо не всегда. Достаточно вспомнить о существовании радиоактивных элементов и коротко живущих элементарных частиц. В рациональной науке словесные утверждения ничего не значат, если они не находят своего отражения в тех или иных математических формулировках. В рассматриваемом случае длительное существование системы возможно тогда и только тогда, когда энергия деформации пружины³ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} c |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 > 0 \quad (\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2) \Rightarrow c > 0.$$

³Нижеследующее условие достаточно только в линейном приближении.

Если $c < 0$, то легко убедиться, что любые бесконечно малые возмущения этой системы приведут к появлению решений, которые неограниченно возрастают во времени, что приведет к взрывному разрушению системы. Иными словами, стоит кому-нибудь на эту систему, и она разрушится. Если же $c > 0$, то система будет сопротивляться всяким попыткам ее разрушить, т.е. при приложении внешней нагрузки ее внутренняя энергия будет возрастать. Приведенное здесь рассуждение, конечно, нельзя связывать со вторым законом термодинамики, поскольку оно не связано со взаимоотношением системы с окружающей средой. Однако, если не буква, то дух этих рассуждений полностью сохраняется и при формулировке второго закона термодинамики. Ко второму закону термодинамики относят следующие утверждения.

Первое: *тепло всегда течет от горячего к холодному.* Это утверждение известно под названием нулевого начала термодинамики. Однако его нельзя обосновать без привлечения окружающей среды (электромагнитного поля). В данной работе потоки тепла не рассматривались.

Второе: *силы трения не могут совершать положительной работы.* Для рассматриваемой нами системы из этого утверждения следуют неравенства

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b > 0.$$

Третье: *при отсутствии внешних силовых и моментных воздействий всякая система стремится к равновесию с окружающей средой, например, излучает энергию в окружающую среду.* В рассмотренном выше примере это утверждение равносильно условию

$$\delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \eta.$$

Четвертое: *энтропия всякой системы либо постоянна, либо возрастает с ростом времени.* В рассмотренном примере это утверждение влечет неравенство

$$\dot{H} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \leq 1.$$

Третье и четвертое утверждения в совокупности ведут к неравенству $0 \leq \eta \leq 1$, использованному в (98). Формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если из нее вытекают следствия типа приведенных выше утверждений. Подробное изложение истории развития понятия энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в превосходной книге [17]. Тем не менее, далеко не со всеми утверждениями книги [17] можно согласиться. В настоящее время понятия температуры и энтропии и их объективный смысл окончательно не установлены. Конечно, термометр позволяет⁴ нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой. Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял. В данном пункте мы хотели дать только приблизительное представление о втором законе термодинамики.

⁴Впрочем, и здесь имеются свои нерешенные проблемы

7 Заключение

Выше сформулированы основные понятия эйлеровой механики и показаны ее отличительные черты. Можно надеяться, что читатель понял самое главное. А именно то, что механика открыта для творческих поисков⁵ и не может быть сведена к чистой математике. Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютонова механика. В этих случаях эйлерова механика едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновой механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлерова механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике. В частности, она позволяет с совершенно новой точки зрения взглянуть на проблемы квантовой физики.

Список литературы

- [1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. // Собр. трудов А.Н.Крылова, т. VII, М.-Л. ИАН СССР, 1936.
- [2] Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. - В кн. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937, с.25-166.
- [3] Boltzmann L. Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik Teil I. Leipzig; 1897, 241s.
- [4] Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. — Собр. тр. (Под ред. Л.Э.Рейзиня.) Рига: Зинатне, 1974, с.73-198.
- [5] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, 560с.
- [6] Пуанкаре А. Измерение времени. Избр. труды А. Пуанкаре, т. III, с.419–428. М.: Наука, 1974. 771с.
- [7] Zaremba S. Réflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle. – Enseignement Math., 1940, t.38, p.59-69
- [8] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Издательство АН СССР, 1959. 386с.
- [9] Мах Э. Механика (историко–критический очерк ее развития). СПб.: Общественная польза, 1909. 448с.
- [10] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В двух томах. Том II. М.: Наука, 1983. 640с.

⁵Однако прежде, чем начинать творить, необходимо ясно осознать идеи, лежащие в основе рациональной механики. К сожалению, многим не ортодоксальным “творцам” это не свойственно.

- [11] Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. Тр. СПбГТУ, N448, С.-Пб.: 1994, с.3-38.
- [12] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**, pp.187-204.
- [13] Куликов К.А. Вращение Земли. М.: Недра, 1985. 159с.
- [14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, Encyclopedia of Physics. Springer - Verl, 1960 vol s/1
- [15] Эйлер Л. Основы динамики точки. М.-Л.: ГИТТЛ, 1938, 500с.
- [16] Гельмгольц Г. О сохранении силы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1934, 143с.
- [17] Truesdell C. Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New-York, 1984. 578p.

Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа*

Аннотация

Случаем Лагранжа называют задачу о вращении твердого тела с трансверсально изотропным тензором инерции в однородном поле тяготения. Центр масс тела расположен на оси симметрии тензора инерции. С формально-математической точки зрения решение этой задачи известно очень давно и приведено во многих книгах и учебниках. Тем не менее, известное решение трудно поддается ясному физическому истолкованию и неоправданно сложно описывает некоторые простые типы движения. В работе дается новая форма решения задачи. В случае быстровращающегося гироскопа получено практически точное решение в элементарных функциях. Показано, что выражение для скорости прецессии, найденное по элементарной теории гироскопов дает ошибку в главном члене.

1 Быстровращающийся гироскоп

Абсолютно твердое тело с трансверсально изотропным тензором инерции, вращающееся вокруг неподвижной точки, называют гироскопом [1]. В технике гироскопы находят очень широкое применение и обычно являются телами вращения. Но нередко [2] гироскопом называют тело с произвольным тензором инерции, и даже не обязательно вращающимся вокруг неподвижной точки. Так что термин “*гироскоп*” не является однозначно определенным и применяется в разных смыслах. Ниже будет рассмотрена простейшая из возникающих здесь задач. К сожалению, обсуждению поведения гироскопа мы вынуждены предпослать относительно длинное решение задачи о быстровращающемся гироскопе. При этом не будут использоваться подходы, типичные для динамики твердого тела. Здесь уместно процитировать известного специалиста по теории гироскопов К. Магнуса [2], стр.117: “*Много усилий было затрачено на поиски таких случаев, для которых было бы возможно точное решение нелинейных уравнений движения. Как бы ни были привлекательны для математика достигнутые при этом результаты, приходится, однако, констатировать, что с физической точки зрения или с точки зрения чисто гироскопической техники они*

*Жилин П.А. Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа // Доклад на XXXI летней школе “Актуальные проблемы механики”, Санкт-Петербург, 2003.

почти (или даже совсем) не представляют интереса.” Поэтому ниже будет представлено приближенное, но с очень высокой степенью точности, решение, причем оно будет найдено в явной форме и выражено через элементарные функции. Сравнивая полученное ниже решение с результатами, представленными в книгах по динамике твердого тела, необходимо соблюдать известную осторожность¹. В частности, в литературе использовалось представление тензора поворота через углы Эйлера, которые в данной задаче неудобны. Ниже используется другое представление тензора поворота.

Итак, рассмотрим тело с трансверсально изотропным тензором инерции, который вычислен относительно неподвижной точки и в отсчетном положении определен выражением

$$\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}),$$

где \mathbf{e} есть единичный вектор, задающий ось изотропии, λ и μ суть осевой и экваториальный моменты инерции соответственно. Будем считать, что начало системы отсчета расположено в точке O , а центр масс расположен на оси симметрии

$$\mathbf{r}_C = l \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C = l \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} \equiv l \mathbf{e}',$$

где l — расстояние от неподвижной точки до центра масс; \mathbf{r}_C и \mathbf{R}_C суть векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях соответственно. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с тензором поворота \mathbf{P} уравнением Пуассона [3, 4]

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (1)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{L} тела \mathcal{A} вычисляется по формуле

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mu \boldsymbol{\omega} + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}') \mathbf{e}'.$$

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела \mathcal{A}

$$[\boldsymbol{\omega} + \eta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}') \mathbf{e}']' = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu}, \quad (2)$$

где \mathbf{k} — орт вертикали, m — масса тела, g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}. \quad (3)$$

Система уравнений (1) – (2) с начальными условиями (3) дает классическую постановку задачи в случае Лагранжа [1, 2, 5]. Решение этой задачи в полном объеме будет изложено в главе, посвященной динамике твердого тела. Ниже рассматривается частный случай, когда $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}$. Кроме того, модуль начальной угловой скорости ω_0 будет считаться достаточно большим. Более точный смысл этого утверждения будет указан позднее. Вычислим проекцию уравнения (2) на орт \mathbf{e}' . При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')'.$$

¹ Даже терминология не всегда совпадает. Используемая в данной книге терминология близка к таковой в учебнике [1], но сильно отличается от принятой в книге [2].

С учетом этого равенства проекция уравнения (2) на орт \mathbf{e}' дает

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = \omega_0. \quad (4)$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (3). Интеграл (4) впервые был получен Лагранжем и потому его принято называть интегралом Лагранжа. Теперь уравнение (2) принимает вид

$$(\boldsymbol{\omega} + \eta \omega_0 \mathbf{e}')' \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} + \eta \omega_0 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}'. \quad (5)$$

Для уравнения (5) нетрудно получить еще два интеграла. Классические подходы существенно опираются на эти интегралы, но в излагаемом ниже решении они практически не используются. Укажем только, что один из них называется интегралом энергии и получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (5) на вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \frac{1}{2} \omega_0^2 + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = \text{const}. \quad (6)$$

Интеграл энергии (6), в совокупности с интегралом Лагранжа (4), утверждает постоянство суммы кинетической и потенциальной энергии тела. Из интеграла энергии (6) немедленно вытекают неравенства

$$-(1 - \cos \alpha) \frac{2\nu}{\omega_0^2} \leq \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \leq (1 + \cos \alpha) \frac{2\nu}{\omega_0^2} \equiv (1 + \cos \alpha) \frac{2mgl}{\mu\omega_0^2}, \quad \cos \alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}.$$

Из этого неравенства видим, что для быстровращающегося гироскопа, т.е. при $2\nu/\omega_0^2 \ll 1$, модуль угловой скорости почти не отличается от модуля начальной угловой скорости. Смысл параметра $2mgl/\mu\omega_0^2$ понятен. Это отношение максимальной потенциальной энергии гироскопа, когда центр масс находится в верхнем положении, к удвоенной начальной кинетической энергии гироскопа. Для быстровращающегося гироскопа это отношение является малым. Если бы угловая скорость была постоянной, то из интеграла энергии следовало бы

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

где использовано стандартное для этой книги обозначение

$$\mathbf{Q}(\gamma \mathbf{m}) \equiv (1 - \cos \gamma) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \gamma \mathbf{E} + \sin \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{E}.$$

Иными словами, если бы модуль угловой скорости был постоянным, то ось гироскопа совершала бы чистую прецессию вокруг орта вертикали с угловой скоростью прецессии $\psi \mathbf{k}$. На самом деле угловая скорость не постоянна, а угол между вертикалью и осью гироскопа меняется, но меняется незначительно. Поэтому тензор поворота нужно искать в виде композиции трех поворотов

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{k} \times \mathbf{e} / \sin \alpha, \quad |\vartheta| \ll 1, \quad (7)$$

где углы ψ , ϑ и φ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. По основной теореме о представлении тензора поворота [3, 4]

представление (7) без допущения о малости угла нутации справедливо всегда. Для быстровращающегося гироскопа вектор нутации $\vartheta = \vartheta \mathbf{p}$ мал по модулю. Поэтому можно использовать аппроксимацию для малых углов

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) = \mathbf{E} + \vartheta \times \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{E} + \vartheta \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}). \quad (8)$$

Вычисляя угловую скорость для поворота (8), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{e}). \quad (9)$$

Нетрудно установить формулы

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot & \left(\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{e} - \dot{\varphi} \mathbf{e} \times \dot{\vartheta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \dot{\vartheta} + \right. \\ & \left. + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e}) \right), \quad \mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e})], \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot & \left(\dot{\psi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e}) + \ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} \times \mathbf{e} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5), приходим к следующему уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{e} + \left(-\dot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} - \eta \omega_0 \mathbf{e} \right) \times \dot{\vartheta} + \\ + \left(\dot{\psi} \dot{\varphi} + \eta \omega_0 \dot{\psi} - \nu \right) \mathbf{k} \times \mathbf{e} + \left(\dot{\psi} \dot{\varphi} + \eta \omega_0 \dot{\psi} - \nu \right) \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e}) = \mathbf{0}. \quad (10) \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнении (10) не содержат малого угла нутации и в этом смысле малыми не являются. Поэтому после отбрасывания слагаемых, содержащих угол нутации, получаем для них уравнения

$$\ddot{\psi}_0 = 0, \quad \ddot{\varphi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0 \dot{\varphi}_0 + \eta \omega_0 \dot{\psi}_0 = \nu.$$

Откуда получаем

$$\dot{\varphi}_0 = \omega_0, \quad \dot{\psi}_0 = \frac{\nu}{(1 + \eta)\omega_0} = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}. \quad (11)$$

Здесь использовано начальное условие для $\dot{\varphi}_0$. Отклонения углов собственного вращения и прецессии от значений (11) должны быть малыми и иметь порядок $O(\vartheta)$.

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \beta, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \gamma, \quad \beta \sim O(\vartheta), \quad \gamma \sim O(\vartheta). \quad (12)$$

Не следует думать, что функции β и γ должны быть малыми в сравнении с $\dot{\varphi}_0$ и $\dot{\psi}_0$ соответственно. В представлении (12) этого не предполагается. В частности, функции γ и $\dot{\psi}_0$ будут иметь одинаковый порядок малости. Из равенств (11) видим, что скорость прецессии $\dot{\psi}_0$ для быстровращающегося гироскопа мала, но угол прецессии

ψ_0 не мал, поскольку он нарастает во времени по линейному закону. Подставляя выражения (12) и (11) в уравнение (10) и отбрасывая в нем величины $O(\beta\vartheta)$ и $O(\gamma\vartheta)$ второго порядка малости, получаем

$$\dot{\gamma} \mathbf{k} + \dot{\beta} \mathbf{e} + \frac{\ddot{\vartheta}}{\sin \alpha} \mathbf{k} \times \mathbf{e} - \frac{\dot{\vartheta}}{\sin \alpha} \left(\frac{\mu\omega_0}{\lambda} \mathbf{e} - \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \mathbf{k} \right) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) + \left(\frac{\mu\omega_0}{\lambda} \gamma + \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \beta \right) \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Проекция уравнения (13) на орт \mathbf{k} дает

$$\dot{\gamma} + \dot{\beta} \cos \alpha = \frac{\lambda\omega_0}{\mu} \dot{\vartheta} \sin \alpha \Rightarrow \gamma + \beta \cos \alpha = \frac{\lambda\omega_0}{\mu} \vartheta \sin \alpha + a,$$

где a есть произвольная постоянная.

Проекция уравнения (13) на орт \mathbf{e} дает

$$\dot{\gamma} \cos \alpha + \dot{\beta} = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \dot{\vartheta} \sin \alpha \Rightarrow \gamma \cos \alpha + \beta = \frac{\lambda\omega_0}{\mu} \vartheta \sin \alpha + b,$$

где b есть произвольная постоянная.

Наконец, проекция уравнения (13) на орт $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$ дает

$$\ddot{\vartheta} + \sin \alpha \left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu} \gamma + \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \beta \right) = 0. \quad (14)$$

Для определения постоянных a и b необходимо использовать начальные условия для угловой скорости. Поскольку начальные углы равны нулю, то выражение (9) дает

$$\omega_0 \mathbf{e} = \left(\dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\vartheta} \right) \Big|_{t=0} \Rightarrow \beta(0) = 0, \gamma(0) = -\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}, \dot{\vartheta}(0) = 0. \quad (15)$$

Используя условия (15), получаем

$$a = -\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}, \quad b = -\frac{\mu\nu \cos \alpha}{\lambda\omega_0}.$$

Исключая в уравнении (14) функции β и γ , получаем уравнение для определения угла нутации

$$\ddot{\vartheta} + \omega_*^2 \vartheta = \nu \sin \alpha, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0, \quad (16)$$

где

$$\omega_*^2 \equiv \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\mu^2} \left(1 - 2 \frac{\mu^2 \nu}{\lambda^2 \omega_0^2} \cos \alpha + \frac{\mu^4 \nu^2}{\lambda^4 \omega_0^4} \right).$$

В этом выражении последнее слагаемое в скобках имеет порядок $O(\vartheta^2)$. Поскольку величины порядка $O(\vartheta^2)$ ранее отбрасывались, то и здесь ее необходимо отбросить. В итоге получаем

$$\omega_*^2 \equiv \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\mu^2} \left(1 - 2 \frac{\mu^2 \nu}{\lambda^2 \omega_0^2} \cos \alpha \right) > 0 \Rightarrow \lambda^2 \omega_0^2 > 2\nu\mu^2 \cos \alpha. \quad (17)$$

Последнее неравенство в (17) является необходимым критерием применимости полученного решения при всех t . Если оно нарушено, то полученное решение правильно только при малых t и не представляет никакого интереса. В этом случае нужно использовать более общий подход, который будет изложен в главе, посвященной задачам динамики твердого тела.

Таким образом, получаем окончательное выражение для угла нутации

$$\vartheta(t) = \frac{\nu \sin \alpha}{\omega_*^2} (1 - \cos \omega_* t), \quad (18)$$

где частота нутационных колебаний ω_* определена формулой (17). Выражение (17) показывает, что для стоячего гироскопа [2], т.е. при $\alpha < \pi/2$, частота нутационных колебаний немного меньше, чем частота нутационных колебаний висячего гироскопа ($\alpha > \pi/2$). Окончательные выражения для скорости собственного вращения и скорости прецессии имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega_0 - \frac{\nu}{\omega_*^2} \left(\frac{\lambda \omega_0}{\mu} \cos \alpha - \frac{\mu \nu}{\lambda \omega_0} \right) (1 - \cos \omega_* t), \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{\nu}{\omega_*^2} \left(\frac{\lambda \omega_0}{\mu} - \frac{\mu \nu}{\lambda \omega_0} \cos \alpha \right) (1 - \cos \omega_* t). \end{aligned} \quad (19)$$

Подчеркнутое слагаемое в (19) следует отбросить как выходящее за пределы точности принятого метода решения задачи. Отметим, что для быстровращающихся гироскопов, которые используются в технике, формулы (18) и (19) являются практически точными. Наиболее показательным является случай, когда при $t = 0$ ось гироскопа была направлена горизонтально, т.е. $\alpha = \pi/2$, $\cos \alpha = 0$. Тогда вместо выражений (18) и (19) будем иметь

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \frac{\mu^2 \nu}{\lambda^2 \omega_0^2} \left(1 - \cos \frac{\lambda \omega_0 t}{\mu} \right), \quad \dot{\vartheta}(t) = \frac{\mu \nu}{\lambda \omega_0} \sin \frac{\lambda \omega_0 t}{\mu}, \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega_0, \quad \dot{\psi}(t) = \frac{\mu \nu}{\lambda \omega_0} \left(1 - \cos \frac{\lambda \omega_0 t}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Сравним полученное решение с решением, представленном в [1] и полученном на основе приближенной теории быстровращающегося гироскопа. Для скоростей оно имеет вид

$$\dot{\vartheta}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}(t) = \omega_0, \quad \dot{\psi}(t) = \frac{\mu \nu}{\lambda \omega_0}.$$

Видим, что эти формулы совпадают с осредненными по периоду нутационных колебаний скоростями, даваемыми формулами (20).

Если бы гироскоп вращался вокруг своего центра масс ($\nu = 0$), то он обладал бы только вращением вокруг собственной оси, причем скорость собственного вращения сохраняла бы свое направление в пространстве. Если $\nu \neq 0$, то на гироскоп действует внешний момент, направленный по вектору $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. На первый взгляд кажется, что ось гироскопа должна поворачиваться также вокруг вектора $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. Но так было бы только в том случае, если бы скорость собственного вращения равнялась бы нулю.

Если $\omega_0 \neq 0$, то ось гироскопа начинает прецессировать вокруг вектора \mathbf{k} . Более точно, для оси гироскопа имеем выражение

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e} + \vartheta \times \mathbf{e}) \simeq \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Последнее выражение и показывает, что ось гироскопа прецессирует вокруг вектора \mathbf{k} с переменной и малой в сравнении с ω_0 скоростью. Но угол прецессии нарастает во времени и потому происходит уход оси гироскопа от первоначально заданного направления на сколь угодно большой угол. В то же время ось гироскопа практически не выходит из горизонтальной плоскости, поскольку угол нутации пренебрежимо мал при всех временах. То обстоятельство, что вращающееся тело, при дополнительном воздействии на него моментом, начинает поворачиваться вокруг оси, ортогональной моменту, кажется удивительным. Но это далеко не единственный факт, вызывающий удивление, при первоначальном изучении спиновых движений твердых тел.

2 Общая постановка задачи

Рассмотрим абсолютно твердое тело A , которое может совершать вращательное движение вокруг точки O , которая принадлежит телу A и неподвижна в системе отсчета. Будем считать, что тензор инерции тела A , вычисленный относительно точки O , трансверсально изотропен и имеет вид

$$\Theta(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot [\mu\mathbf{E} + (\lambda - \mu)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \cdot \mathbf{P}_*^T(t) = \mu\mathbf{E} + (\lambda - \mu)\mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e}, \quad (21)$$

где λ , μ суть осевой и экваториальный моменты инерции тела соответственно, \mathbf{E} — единичный тензор второго ранга, $\mathbf{P}_*(t)$ — тензор поворота, \mathbf{e} — орт оси симметрии тензора инерции в отсчетном положении, в качестве которого выберем положение тела в начальный момент времени, т.е. $\mathbf{P}_*(0) = 0$. Здесь и ниже используются обозначения, принятые в книгах [3, 6].

Будем считать, что начало в системе отсчета расположено в точке O , и центр масс расположен на оси симметрии

$$\mathbf{r}_C = l\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{r}_C = l\mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e} \equiv l\mathbf{e}',$$

где l — расстояние от неподвижной точки до центра масс; \mathbf{r}_C и \mathbf{R}_C суть векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях соответственно. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_*$ связана с тензором поворота \mathbf{P}_* уравнением Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}_* = \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{P}_*. \quad (22)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{L} тела A вычисляется по формуле

$$\mathbf{L}_* = \Theta \cdot \boldsymbol{\omega}_* = \mu\boldsymbol{\omega}_* + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}'.$$

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела A

$$[\boldsymbol{\omega}_* + \eta(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}']' = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \boldsymbol{\nu} \equiv \frac{mgl}{\mu}, \quad (23)$$

где \mathbf{k} — орт вертикали, m — масса тела, g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}_*(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}_*(0) = \boldsymbol{\omega}_*^0. \quad (24)$$

Система уравнений (22) – (23) с начальными условиями (24) дает классическую постановку задачи в случае Лагранжа [5]. Решение этой задачи зависит от пяти параметров: двух скалярных параметров η и ν и одного векторного параметра $\boldsymbol{\omega}_*^0$. Но зависимость решения от параметра η является несущественной, и от нее легко избавиться. Для этого предварительно вычислим проекцию уравнения (23) на орт \mathbf{e}' . При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_* \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega}_* \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega}_* \cdot (\boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')'.$$

С учетом этого равенства проекция уравнения (23) на орт \mathbf{e}' дает

$$(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}' = a_* = \text{const}. \quad (25)$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (24). Интеграл (25) принято называть интегралом Лагранжа.

Введем обозначение $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n})$ для поворота на угол φ вокруг единичного вектора \mathbf{n} . Для него справедлива теорема Эйлера

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (26)$$

Ниже будет широко использоваться теорема об угловой скорости композиции поворотов [3, 4]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad (27)$$

где угловые скорости $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ отвечают тензорам поворота \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 соответственно. Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_* &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t \mathbf{e}) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_* = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя выражение (28) в уравнение (23) и присоединяя к результату уравнение Пуассона, приходим к следующей системе

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \quad (29)$$

К системе (29) необходимо добавить начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \quad (\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}_*^0 + \eta a_* \mathbf{e}). \quad (30)$$

Задача (29) – (30) немного проще исходной, поскольку ее решение зависит от четырех параметров: скаляра ν и вектора $\boldsymbol{\omega}_0$. Именно эта задача будет анализироваться ниже. В литературе приводится решение задачи (29) – (30), точнее говоря ее исходной постановки, на основе представления тензора поворота через углы Эйлера [3, 4]

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = 0, \quad |\mathbf{p}| = 1. \quad (31)$$

Другие представления в известной автору литературе не использовались. Более того, в литературе не дается никаких обоснований в пользу использования именно углов Эйлера. В следующем пункте будет использовано другое представление тензора поворота, которое диктуется самим решением задачи, а не принимается заранее. Получаемое при этом решение значительно проще поддается наглядной интерпретации, нежели при использовании углов Эйлера.

3 Формальное решение задачи Лагранжа

Формальное решение рассматриваемой задачи (29) – (30) опирается на факт существования трех очевидных первых интегралов. Они даются выражениями

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = a \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = b \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}, \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = H, \quad (32)$$

где величины a , b , H суть постоянные, определяемые по начальным условиям. Первый интеграл в системе (32) есть проекция уравнения (29) на орт \mathbf{e}' и называется [7] интегралом Лагранжа. Второй интеграл в системе (32) есть проекция уравнения (29) на орт \mathbf{k} и называется интегралом площадей. Наконец, последний интеграл в системе (32) есть интеграл энергии. Осталось выписать проекцию уравнения (29) на орт $\mathbf{k} \times \mathbf{e}' / |\mathbf{k} \times \mathbf{e}'|$. После несложных преобразований, учитывающих интегралы (32), указанная проекция записывается в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \nu x^2 + \nu - ab = 0, \quad x = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'. \quad (33)$$

После исключения квадрата модуля угловой скорости с помощью интеграла энергии уравнение (33) можно записать в другой форме

$$\ddot{x} + 2Hx - 3\nu x^2 + \nu - ab = 0, \quad x = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'. \quad (34)$$

С формальной точки зрения решение уравнения (34) легко строится в эллиптических функциях и здесь не приводится. Будем считать, что функция $x(t)$ известна. Задача состоит в том, чтобы через нее выразить все остальные неизвестные. Интегралы (32) дают проекции угловой скорости на орты \mathbf{e}' и \mathbf{k} . Вычислим скалярное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = -\dot{x}. \quad (35)$$

Примем векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} \times \mathbf{e}'$$

в качестве базиса. Тогда векторы взаимного базиса вычисляются по формулам

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{k} - x\mathbf{e}'}{1 - x^2}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}' - x\mathbf{k}}{1 - x^2}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}'}{1 - x^2}.$$

Теперь для вектора угловой скорости имеем выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - ax}{1 - x^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{x}}{1 - x^2} \mathbf{k} \times \mathbf{e}' + \frac{a - bx}{1 - x^2} \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e}. \quad (36)$$

Выражение (36) еще не дает полного представления об угловой скорости, поскольку содержит неопределенный вектор \mathbf{e}' , зависящий от тензора поворота. Подчеркнем, что в использованных выше построениях конкретное представление для тензора поворота не имело значения. Поэтому можно, в принципе, использовать любое представление для тензора поворота. Однако выражение (36) дает ясное представление о том, какая должна быть структура тензора поворота. А именно, угловая скорость (36) отвечает тензору поворота вида

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}|} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{\sin \gamma_0}, \quad \cos \gamma_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}, \quad (37)$$

где углы ψ , ϑ , φ будем называть углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Если векторы \mathbf{k} и \mathbf{e} совпадают, то в качестве вектора \mathbf{p} можно выбрать произвольный единичный вектор, ортогональный вектору \mathbf{k} . Нетрудно установить связь между углом γ и углом нутации ϑ . Действительно

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = \cos(\gamma_0 + \vartheta) \Rightarrow \gamma = \gamma_0 + \vartheta. \quad (38)$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \sin(\gamma_0 + \vartheta) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}. \quad (39)$$

С учетом равенств (38) и (39) выражение для угловой скорости (36) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - a\chi}{1 - \chi^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{\chi} \sin \gamma}{1 - \chi^2} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \frac{a - b\chi}{1 - \chi^2} \mathbf{e}'. \quad (40)$$

С другой стороны, угловую скорость можно вычислить по тензору поворота (37) с учетом теоремы (27)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \dot{\varphi} \mathbf{e}'. \quad (41)$$

Из сравнения выражений (40) и (41) получаем уравнения для определения углов прецессии и собственного вращения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{b - a \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{a - b \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \Rightarrow \frac{d(\psi + \vartheta)}{dt} = \frac{a + b}{1 + \cos \gamma}. \quad (42)$$

Что касается равенства

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\dot{\chi} \sin \gamma}{1 - \chi^2} = \dot{\gamma},$$

то оно выполняется тождественно в силу (38).

Таким образом, если решение уравнения (34) найдено, то углы прецессии и собственного вращения находятся квадратурами (42). Разумеется, к уравнению (34) необходимо присоединить начальные условия

$$t = 0: \quad \chi(0) = \cos \gamma_0, \quad \dot{\chi}(0) = -\boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) \equiv -c. \quad (43)$$

Последнее условие немедленно следует из равенства (40), если его записать при $t = 0$. Не уменьшая общности можно считать, что $c = 0$. Это означает, что отсчетное положение тела выбрано так, что начальная угловая скорость лежит в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{k} и \mathbf{e} .

С формально-математической точки зрения задача полностью решена в том смысле, что она сведена к квадратурам. Однако приемлемость полученного решения с физической точки зрения еще предстоит выяснить.

4 Регулярная прецессия

Случай регулярной прецессии традиционно вызывает интерес, поскольку это наиболее простой и наглядный вид движения твердого тела. Регулярной прецессией называют движение тела, при котором некая материальная прямая, т.е. прямая, составленная из одних и тех же точек тела, вращается вокруг заданного в пространстве и неизменного во времени вектора \mathbf{k} так, что угол между указанной материальной прямой и вектором \mathbf{k} постоянен во времени. В случае Лагранжа в качестве материальной прямой выбираем ось тела вращения, а в качестве вектора \mathbf{k} выбираем орт вертикали. При регулярной прецессии угол между ними сохраняется неизменным

$$\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Для угловой скорости отсюда следует выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \left(\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} \right).$$

В этом случае уравнение (29) принимает совсем простой вид

$$\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 = \nu. \quad (44)$$

Последнее из этих условий налагает ограничение на начальную скорость, которая должна иметь вид

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi}_0 \mathbf{k} + \dot{\varphi}_0 \mathbf{e} = \dot{\varphi}_0 \left(\mathbf{e} + \frac{\nu}{\dot{\varphi}_0^2} \mathbf{k} \right).$$

При этом угловая скорость также прецессирует вокруг орта вертикали

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0.$$

На первый взгляд кажется, что полученное решение справедливо при произвольном значении угла между осью тела и вертикалью. Однако это не так. Действительно, по формулам (42) и (44) имеем

$$\frac{(b - a \cos \gamma)}{\sin^2 \gamma} \frac{(a - b \cos \gamma)}{\sin^2 \gamma} = \nu. \quad (45)$$

Анализ этого уравнения пока отложу.

5 Обсуждение формального решения

5.1 Общие замечания

Сомнения в физической приемлемости полученного решения связаны со следующим фактом. Известно [3, 4], что один и тот же тензор поворота допускает несчетное множество различных представлений. Каждому из этих представлений отвечает единственный набор трех параметров типа углов ψ , ϑ , φ , использованных выше. Если для

всех начальных данных используется одно и то же представление тензора поворота, то это означает, что вся область начальных данных покрыта одной координатной картой. В принципе это возможно, но обычно, даже в простейших случаях такая карта будет иметь полюса, т.е. полученное решение будет содержать в себе либо неопределенности типа $0/0^2$, либо приводят к разрывным решениям. Кстати, есть примеры, в которых, например, углы Эйлера выражаются функциями времени, имеющими разрывы первого рода, т.е. скачки, хотя все наблюдаемые величины, например, угловые скорости оказываются непрерывными функциями времени. В качестве иллюстрации сказанного сошлемся на работу [4], в которой для случая Эйлера показано, что вся область начальных данных разбивается на две подобласти, каждую из которых нужно покрывать своей картой. Только в этом случае получаются решения, пригодные для практического использования. В приводимом в литературе решении для случая Эйлера используется одна карта. В результате, при компьютерных расчетах по приводимым в книгах формулам получаются совершенно неправильные результаты. Задача (29) – (30) внешне выглядит чрезвычайно простой. Тем не менее, движения, совершаемые телом в этом случае, могут существенно различаться по своему типу. Поэтому кажется мало вероятным, чтобы единственное представление тензора поворота (37) было бы удовлетворительным при всех начальных данных.

Тензор поворота часто удобно представлять в виде композиции поворотов вокруг неких фиксированных осей, которые, в принципе, выбираются произвольно [3, 4]. Выбор осей поворота определяет систему параметров (систему координат), через которые выражается изучаемый поворот тела. Однако далеко не при всяком выборе осей поворота вводимая система координат оказывается целесообразной. Важность правильного выбора осей поворота покажем на простейшем примере. Рассмотрим поворот вокруг фиксированной оси \mathbf{n} , т.е. тензор поворота $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{n})$. Попытаемся представить этот поворот через углы Эйлера

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}), \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0,$$

где единичные ортогональные между собой векторы \mathbf{m} и \mathbf{e} могут выбираться произвольно. Воспользовавшись теоремой Эйлера (26), нетрудно получить нелинейную систему, позволяющую, в принципе, выразить параметры ψ , ϑ , φ через параметр α . Но проще для этой цели использовать равенство угловых скоростей

$$\dot{\alpha} \mathbf{n} = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}.$$

В скалярной форме эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + \dot{\varphi} \cos \vartheta &= \cos \beta_1 \dot{\alpha}, & \dot{\vartheta} &= (\cos \beta_2 \cos \psi + \cos \beta_3 \sin \psi) \dot{\alpha}, \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta &= (\sin \psi \cos \beta_2 - \cos \psi \cos \beta_3) \dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\mathbf{n} = \cos \beta_1 \mathbf{m} + \cos \beta_2 \mathbf{e} + \cos \beta_3 \mathbf{m} \times \mathbf{e}, \quad \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 = 1.$$

²Эти неопределенности делают невозможным использование полученных формул для компьютерных вычислений.

Систему (46) можно переписать в более компактной форме ($\sigma \equiv \psi - \gamma$)

$$\dot{\sigma} + \dot{\varphi} \cos \vartheta = \cos \beta_1 \dot{\alpha}, \quad \dot{\vartheta} = \sin \beta_1 \cos \sigma \dot{\alpha}, \quad \dot{\varphi} \sin \vartheta = \sin \beta_1 \sin \sigma \dot{\alpha}, \quad (47)$$

где

$$\cos \gamma = \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_1}, \quad \sin \gamma = \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_1}, \quad \text{если } \beta_1 \neq 0; \quad \gamma = 0, \quad \text{если } \beta_1 = 0.$$

Систему (47), в свою очередь, можно переписать в другом виде

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \cos \vartheta = \cos \beta_1, \quad \frac{d\vartheta}{d\alpha} = \sin \beta_1 \cos \sigma, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} \sin \vartheta = \sin \beta_1 \sin \sigma. \quad (48)$$

В такой записи хорошо видно, что все искомые переменные являются функциями угла α и постоянных $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Системы (47) или (48) достаточно сложны для решения, но эта сложность отнюдь не связана с характером движения, а обусловлена исключительно выбором представления тензора поворота. Разумеется, в рассматриваемом случае никаких проблем не возникает, если изначально принять, что $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, т.е. распорядиться возможностью выбирать углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Например, можно принять $\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi/2, \beta_3 = \pi/2$. В таком случае система (48) решается элементарно. В реальных задачах, ситуация сложнее. Всякая задача зависит от набора параметров, включая начальные данные. Всю область параметров можно разбить на подобласти. В каждой из этих подобластей нужно искать собственное представление для тензора поворота. Именно это и сделано в работе [4] в случае Эйлера. В полученном выше формальном решении этого не сделано, и вся область параметров покрыта одной картой. Поэтому, в общем случае, полученное формальное решение может оказаться неудобным для практического применения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим частные случаи задачи Лагранжа.

5.2 Плоские движения — физический маятник

Рассмотрим частный случай начальных данных

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (49)$$

В таком случае, согласно (42), углы прецессии и собственного вращения обращаются в нулевые. При этом тело поворачивается вокруг фиксированной оси, натянутой на вектор $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$. Иными словами, мы имеем дело с физическим маятником. Посмотрим, во что превращается в этом случае формальное решение. Имеем

$$x = \cos \gamma \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -\sin \gamma \dot{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\sin \gamma \ddot{\gamma} - \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2.$$

Кроме того, согласно (40) имеем, что $\omega^2 = \dot{\gamma}^2$. Подставляя эти выражение в уравнение (33), получаем уравнение физического маятника

$$\ddot{\gamma} - \nu \sin \gamma = 0. \quad (50)$$

Стандартный вид уравнения физического маятника получается с помощью замены $\gamma = \pi + \vartheta$. Уравнение (50), как известно, упростить нельзя. Таким образом, представление тензора поворота в виде (37) в рассматриваемом случае оказывается наилучшим. Надо полагать, что оно будет оставаться приемлемым и в случае малых значений величин a, b . Видимо, представление (37) является удовлетворительным в случае, когда $b \neq 0$ и не мало, но $a = 0$ или близко к нулю: $|a| \ll |b|$. В последнем случае ось тела прецессирует вокруг вектора \mathbf{k} , причем скорость прецессии знакопостоянна: $\text{sign } \dot{\psi} = \text{sign } b$.

5.3 Свободные вращения

В предыдущем случае главную роль играло поле тяготения. Теперь рассмотрим другую крайность: пусть поле тяготения отсутствует, т.е. $\nu = 0$. В таком случае задача (29) – (30) имеет совсем простое решение

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\omega_0 t \mathbf{m}), \quad |\mathbf{m}| = 1. \quad (51)$$

В этом случае тело совершает повороты вокруг фиксированной оси, натянутой на вектор $\boldsymbol{\omega}_0$, причем ось тела прецессирует вокруг вектора $\boldsymbol{\omega}_0$:

$$\mathbf{e}' = (1 - \cos \omega_0 t) \cos \alpha \mathbf{m} + \cos \omega_0 t \mathbf{e} + \sin \omega_0 t \mathbf{m} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = \cos \alpha$$

с постоянной скоростью ω_0 . Качественное рассмотрение этого частного случая задачи Лагранжа на основе углов Эйлера подробно обсуждается в книге [8]. Выясним насколько хорошо этот случай описывается формальным решением, построенным выше. При $\nu = 0$ интеграл энергии (32) показывает, что угловая скорость постоянна по модулю, а уравнение (33) и начальные условия (43) принимают вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = ab; \quad x(0) = \cos \gamma_0, \quad \dot{x}(0) = -c. \quad (52)$$

Уравнения (52) и (43) легко интегрируются в элементарных функциях. Для иллюстрации рассмотрим конкретные начальные условия

$$a = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = \omega_0 \cos \alpha, \quad b = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} = \omega_0 \cos(\alpha + \gamma_0), \quad c = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) = 0, \quad (53)$$

где $\mathbf{m} \cdot \mathbf{e} \equiv \cos \alpha$. Решение задачи (52) – (53) имеет вид

$$x = \cos \alpha \cos(\alpha + \gamma_0) + \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma_0) \cos \omega_0 t. \quad (54)$$

Не составляет большого труда по формулам (42) и (54) вычислить углы прецессии и собственного вращения, но далее для наглядности будем считать, что угол α мал, т.е. начальная угловая скорость почти совпадает с начальным направлением оси симметрии. В этом случае выражение (54) можно упростить, отбрасывая слагаемые порядка $O(\alpha^2)$

$$x = \cos \gamma_0 - \alpha \sin \gamma_0 (1 - \cos \omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \alpha (1 - \cos \omega_0 t). \quad (55)$$

Здесь использованы формулы (38), т.е. угол нутации есть величина первого порядка малости. Выражения (42) также упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\alpha\omega_0 \cos \omega_0 t}{\sin \gamma_0}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 \left[1 + \frac{\alpha \cos \omega_0 t}{\operatorname{tg} \gamma_0} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \psi = -\alpha \frac{\sin \omega_0 t}{\sin \gamma_0}, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha \sin \omega_0 t}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \end{aligned} \quad (56)$$

Итак, в рассматриваемом случае ось симметрии совершает регулярную прецессию вокруг вектора \mathbf{m} . Именно это простейшее движение и описывают относительно сложные формулы (54) – (56). Сами по себе эти формулы не имеют никакого смысла, если не помнить о представлении тензора поворота (37), т.е. об осях, вокруг которых происходит вращение. Конечно, формулы (37) и (54) – (56) позволяют увидеть истинное движение тела, но представление (53) несравнимо проще для восприятия. Если бы использовались углы Эйлера, то описание движения оказалось бы еще сложнее, чем приведенное выше.

Список литературы

- [1] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414с.
- [2] Магнус К. Гироскоп. Теория и применение М.: Мир, 1974. 525с.
- [3] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Петербург, Нестор, 2001. 276стр.
- [4] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies/ ZAMM. 76 (1996) 4. P.187 – 204.
- [5] В.Д. Мак-Миллан. Динамика твердого тела. М.: ИЛ, 1951. 467с.
- [6] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512с.
- [7] Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367с.
- [8] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431с.

Нелинейная теория тонких стержней*

Аннотация

Доклад посвящен обсуждению динамической теории тонких пространственно изогнутых и естественно закрученных стержней. Предлагаемая теория включает в себя все известные варианты теории стержней, но обладает более широкой областью применимости. Предложен новый метод построения тензоров упругости и установлена их структура. При этом существенно используется новая теория симметрии тензоров, определенных в пространстве с двумя независимыми ориентациями. Для плоских упругих кривых определены все модули упругости. Значительное внимание в докладе уделено анализу ряда классических задач, включая те из них, решение которых ведет к парадоксальным результатам. В частности, подробно рассмотрена знаменитая эластика Эйлера и показано, что наряду с известными равновесными конфигурациями в ней существуют и динамические равновесные конфигурации. При этом форма упругой линии не меняется, а изогнутый стержень совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси. Энергия деформации при этом не меняется. Подчеркнем, что речь не идет о движениях стержня как жесткого целого, поскольку заделанный торец стержня остается неподвижным. Отсюда следует, что изогнутая равновесная конфигурация в эластике Эйлера является, вопреки общепринятой точке зрения, неустойчивой. С другой стороны, этот вывод не подтверждается экспериментальными данными. Поэтому возникает парадоксальная ситуация, которая требует своего решения. Аналогичная ситуация, известная под названием парадокса Николаи, возникает при кручении стержня торцевым моментом. В этом случае эксперимент показывает, что крутящий момент, оказывает стабилизирующее действие, что находится в резком противоречии с теорией.

1 Теория стержней и современная механика

Теория тонких стержней в истории развития механики и математической физики сыграла выдающуюся роль. Чтобы яснее отобразить вклад теории тонких стержней в развитие естественных наук, перечислим только некоторые факты.

*Жилин П.А. Нелинейная теория тонких стержней // Доклад на XXXIII летней школе "Актуальные проблемы механики", Санкт-Петербург, 2005.

Рождение обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1691 году Якоб Бернулли вывел дифференциальное уравнение равновесия каната (нити)

$$\mathbf{T}' + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Это было первое дифференциальное уравнение в истории науки.

Рождение уравнений в частных производных. В 1742 году Жак Даламбер вывел уравнение поперечных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Это было первое дифференциальное уравнение в частных производных. Разработка методов его решения привело к созданию **теории разложения функций в ряды** — Даниил Бернулли и Леонард Эйлер.

Рождение теории ветвления решений нелинейных дифференциальных уравнений. В 1744 году Л. Эйлер решил задачу о продольном изгибе стержня, названную впоследствии **Эластикой Эйлера**, и положившую начало теории ветвлений решений и теории собственных значений нелинейных операторов.

Рождение новой механики и доказательство неполноты ньютоновой механики. В 1771 году Л. Эйлер впервые вывел общие уравнения равновесия стержней

$$\mathbf{T}' + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{T} + \rho \mathbf{L} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Чтобы вывести уравнения (3) Л. Эйлеру понадобилось около 50 лет размышлений. При этом он совершил одно из величайших открытий в механике и физике, которое в полной мере не осознается большинством механиков и физиков вплоть до настоящего времени. А именно, он осознал, что помимо сил и моментов сил в механике фундаментальную роль играют моменты как самостоятельные сущности, не определяемые через понятие момента силы. Это означало, во-первых, необходимость введения нового фундаментального закона физики и, во-вторых, принципиальную неполноту ньютоновой механики. Это открытие Л. Эйлера имеет громадное значение во всей физике, но в полной мере ученые осознают его значение в ближайшем будущем при разработке явлений микромира, в котором второй закон динамики Эйлера играет определяющую роль. Хотя Л. Эйлер сделал решающий шаг по введению моментов, независимых от понятия момента силы, но общее определение момента было дано сравнительно недавно П.А. Жилиным, и оно еще не вошло в учебники механики.

Рождение теории устойчивости неконсервативных систем. В 1927 году Е.Л. Николаи сообщил результаты анализа устойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня и показал, что она неустойчива при любом сколь угодно малом значении крутящего момента (парадокс Николаи). Этот результат буквально шокировал ученых того времени, привыкших к понятию критических сил по Эйлеру. Тогда же П.Ф. Папкович указал, что речь идет об анализе неконсервативной системы и потому не стоит удивляться полученному результату, поскольку возможна накачка энергии в систему. Последующее развитие теории устойчивости неконсервативных систем выявило и другие удивительные факты, например, дестабилизирующую роль внутреннего трения. В докладе будет показано, что парадокс Николаи объясняется причинами, не связанными непосредственно с неконсервативностью системы. Тем не

менее, теория устойчивости неконсервативных систем в настоящее время является одним из важных разделов механики.

Рождение теории симметрии в многоориентированных пространствах. В 1977 году П.А. Жилин при построении определяющих уравнений в теории стержней и оболочек обнаружил, что применение классической теории симметрии ведет к абсурдным результатам. Анализ показал, что причиной создавшегося тупика является тот факт, что в теории стержней и оболочек вводимые тензорные объекты действуют в пространствах с двумя независимыми ориентациями. Поэтому в таком пространстве существуют тензоры четырех различных типов. Классическая теория симметрии применима только к полярным тензорам, т.е. объектам, не зависящим от выбора ориентаций в пространстве. После осознания этих фактов, не составило особого труда разработать обобщенную теорию симметрии, применимую к тензорам любого типа. Следует указать, что без обобщенной теории симметрии корректное построение общей теории стержней и оболочек оказывается невозможным, а также теории микрополярных сред оказывается невозможным. Разумеется, можно обойтись и без этой теории, если материал стержня или оболочки подчиняется известным уравнениям теории упругости, что справедливо далеко не всегда. Но даже в этом частном случае возникают, строго говоря, непреодолимые проблемы.

Выше были отмечены только те факты, которые повлияли и продолжают влиять на становление теоретического фундамента современной механики и математической физики. О громадном значении теории стержней при решении актуальных проблем техники и строительства в данном докладе можно и не говорить. К сожалению, рамки доклада не позволяют рассказать о замечательных достижениях многих исследователей при решении интереснейших конкретных задач теории стержней.

Нерешенные проблемы теории стержней. В теории стержней получено немало удивительных и даже парадоксальных результатов, которые требуют ясных объяснений. Крайне слабо изучены пространственные формы движения стержней. В рамках существующей теории стержней трудно строго исследовать важные для приложений задачи совместной динамики стержней и, например, абсолютно твердых тел, поскольку эти два раздела механики изложены на различных и трудно совместимых языках. Основным препятствием на пути преодоления всех этих трудностей является отсутствие достаточно общей нелинейной теории стержней, изложенной на удобном для приложений языке. Первая презентация такой теории является одной из целей данного доклада. Другой, не менее важной, целью доклада является обсуждение с позиций представленной теории ряда классических задач теории стержней и выявление в них новых обстоятельств, скрытых в существующих решениях. В частности, будет дано новое истолкование парадокса Николаи, основанное на полном анализе другой классической задачи об эластике Эйлера. Автор располагает решениями целого ряда новых задач, но, к сожалению, вынужден оставить их за рамками доклада.

2 Модель стержня и его движения

Моделью тонкого стержня является оснащенная кривая, которая определяется заданием репера

$$\{\mathbf{r}(s), \mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)\}, \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{mn}, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (4)$$

где s есть длина дуги кривой, l — длина кривой.

Вектор $\mathbf{r}(s)$ в (4) определяет несущую кривую, для которой задан трехгранник Френе $\{\mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{t}, \mathbf{t}_2 \equiv \mathbf{n}, \mathbf{t}_3 \equiv \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}\}$, где векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} суть единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали соответственно. Для естественного трехгранника имеем формулы Серре–Френе

$$\mathbf{t}'_i = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}_i, \quad \boldsymbol{\tau}(s) = R_t^{-1}(s)\mathbf{t}(s) - R_c^{-1}(s)\mathbf{b}(s), \quad (5)$$

где R_c — радиус кривизны и R_t — радиус кручения несущей кривой, $\boldsymbol{\tau}$ — вектор Дарбу несущей кривой.

Таким образом, в каждой точке несущей кривой заданы два трехгранника: естественный трехгранник $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ и дополнительный трехгранник $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 = \mathbf{t}\}$. Векторы (\mathbf{n}, \mathbf{b}) и $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ лежат в нормальной плоскости к недеформированной несущей кривой, но, в общем случае, не совпадают между собой. Поперечное сечение стержня лежит в нормальной плоскости и занимает в ней область F .

Изменение трехгранника $\mathbf{d}_k(s)$ при движении вдоль несущей кривой будем характеризовать вектором $\mathbf{q}(s)$ таким, что

$$\mathbf{d}'_k(s) = \mathbf{q}(s) \times \mathbf{d}_k(s), \quad (6)$$

где $\mathbf{q}(s)$ называется вектором Дарбу оснащения.

Нетрудно установить связь между векторами Дарбу оснащения \mathbf{q} и несущей кривой $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{q} = (\varphi' + R_t^{-1})\mathbf{t} - R_c^{-1}\mathbf{b} = \varphi'\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

где φ называется углом естественной крутки стержня.

Обратимся к описанию движений стержня. Недеформированное состояние оснащенной кривой (стержня) будем называть отсчетной конфигурацией. Конфигурацию стержня в данный момент времени t будем называть актуальной. Переход стержня из отсчетной конфигурации в актуальную называется движением стержня и определяется заданием отображений

$$\mathbf{r}(s) \rightarrow \mathbf{R}(s, t); \quad \mathbf{d}_k(s) \rightarrow \mathbf{D}_k(s, t).$$

Движение будем характеризовать заданием вектора перемещения $\mathbf{u}(s, t)$ и тензора поворота $\mathbf{P}(s, t)$

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{u}(s, t), \quad \mathbf{D}_k(s, t) = \mathbf{P}(s, t) \cdot \mathbf{d}_k(s). \quad (8)$$

Трансляционная скорость вершины репера, т.е. точки несущей кривой с координатой s , и угловая скорость вращения трехгранника $\mathbf{D}_k(s, t)$ определяются стандартным образом

$$\mathbf{V}(s, t) = \dot{\mathbf{R}}(s, t), \quad \dot{\mathbf{P}}(s, t) = \boldsymbol{\omega}(s, t) \times \mathbf{P}(s, t), \quad \dot{f} \equiv df/dt. \quad (9)$$

Второе из уравнений (9) называется уравнением Пуассона. Если тензор поворота задан, то угловая скорость вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}(s, t) = -\frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right]_{\times}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (10)$$

3 Фундаментальные законы механики

Первый и второй законы динамики Эйлера

$$\mathbf{N}'(s, t) + \rho_0 \mathcal{F}(s, t) = \rho_0 (\mathbf{V} + \underline{\Theta_1 \cdot \boldsymbol{\omega}})', \quad (11)$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} + \rho_0 \mathcal{L} = \rho_0 \mathbf{V} \times \underline{\Theta_1 \cdot \boldsymbol{\omega}} + \rho_0 (\underline{\mathbf{V} \cdot \Theta_1} + \Theta_2 \cdot \boldsymbol{\omega})', \quad (12)$$

причем подчеркнутые слагаемые ранее в теории стержней не фигурировали.

Уравнение баланса энергии (Дж. Грин, 1839)

$$\rho_0 \dot{u} = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{V}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}' + h' + \rho_0 \mathcal{Q}, \quad (13)$$

Введем в рассмотрение векторы деформации: $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор деформации растяжения–поперечного сдвига, $\boldsymbol{\Phi}$ — вектор деформации изгиба–кручения. Они определяются формулами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \quad (14)$$

Векторы деформации удовлетворяют условиям интегрируемости Картана

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{V}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\omega}'. \quad (15)$$

Для иллюстрации покажем смысл второго вектора деформации

$$\boldsymbol{\Phi}_\times = \left[\left(\bar{\varphi}' - \varphi' + \left(\frac{1}{\bar{R}_t} - \frac{1}{R_t} \right) \right) \mathbf{t} - \left(\frac{\cos(\bar{\varphi} - \varphi)}{\bar{R}_c} - \frac{1}{R_c} \right) \mathbf{b} - \frac{\sin(\bar{\varphi} - \varphi)}{\bar{R}_c} \mathbf{n} \right].$$

Подставляя (15) в (13), получаем

$$\rho_0 \dot{u} = \mathbf{N} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{M} \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}) + h' + \rho_0 \mathcal{Q}, \quad (16)$$

Уравнение баланса энергии в форме (16) является основой для последующего анализа.

4 Введение энтропии и соотношения Коши-Грина

Усилие и момент в стержне представим в виде суперпозиции упругих ($\mathbf{N}_e, \mathbf{M}_e$) и диссипативных ($\mathbf{N}_d, \mathbf{M}_d$) слагаемых

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}) + \mathbf{N}_d(s, t), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}) + \mathbf{M}_d(s, t).$$

Упругими называют составляющие усилий и моментов, которые не зависят от скоростей. Диссипативные составляющие могут зависеть, как от скоростей, так и от всей предыстории движения.

Обозначим через ϑ температуру стержня, измеряемую каким либо термометром, т.е. температура является экспериментально определяемым параметром. Для простоты считаем, что температура не меняется по сечению стержня. Введем новую функцию η , называемую энтропией. По определению, она находится по уравнению

$$\vartheta \dot{\eta} = h' + \rho_0 \mathcal{Q} + \mathbf{N}_d \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{M}_d \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}) \quad (17)$$

Принятое определение энтропии отличается от традиционного и не нуждается в понятиях обратимых и необратимых процессов. Введение энтропии равенством (17) возможно для любых процессов. Равенство (17) называется уравнением теплопроводности и описывает процесс распространения тепла в стержне.

Используя (17), уравнение баланса энергии (16) переписываем в следующем виде

$$\rho_0 \dot{u} = \mathbf{N}_e \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{M}_e \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}) + \vartheta \dot{\eta}. \quad (18)$$

Уравнение (18) называется *приведенным уравнением баланса энергии*. Важность этого уравнения определяется тем, что оно указывает от каких аргументов зависит внутренняя энергия. Примем, что внутренняя энергия есть функция следующих аргументов

$$u = u(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}, \eta).$$

Понятно, что внутренняя энергия должна быть инвариантна относительно наложения жестких движений. Рассмотрим два движения стержня: $\mathbf{R}(s, t)$, $\mathbf{P}(s, t)$ и $\mathbf{R}_*(s, t)$, $\mathbf{P}_*(s, t)$, которые связаны соотношением

$$\mathbf{R}_*(s, t) - \mathbf{R}_*(\bar{s}, t) = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot [\mathbf{R}(s, t) - \mathbf{R}(\bar{s}, t)], \quad \mathbf{P}_*(s, t) = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P}(s, t),$$

где $\mathbf{Q}(\alpha)$ семейство собственно ортогональных тензоров, непрерывно зависящее от параметра α , s и \bar{s} - две произвольно выбранные точки стержня.

Согласно определению векторов деформации (14) и формуле (10), имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_*(s, t) = \mathbf{R}'_* - \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{t} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(s, t),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_*(s, t) = -\frac{1}{2} [\mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{P}_*^T]_{\times} = -\frac{1}{2} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Q}^T]_{\times} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}(s, t).$$

Инвариантность внутренней энергии относительно преобразования (4) требует выполнения следующего равенства

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}_*, \boldsymbol{\Phi}_*, \mathbf{P}_*, \eta) = u[\mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P}, \eta] = u(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}, \eta). \quad (19)$$

Для тензора $\mathbf{Q}(\alpha)$ примем

$$\frac{d}{d\alpha} \mathbf{Q}(\alpha) = \boldsymbol{\zeta}(\alpha) \times \mathbf{Q}(\alpha), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\omega}(t).$$

Учитывая эти равенства, дифференцируя предыдущее равенство по α и полагая в получившемся уравнении $\alpha = 0$, получаем уравнение, которому должна удовлетворять внутренняя энергия

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0. \quad (20)$$

Вычислим производную по времени от внутренней энергии

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} + \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0.$$

Исключая из этого равенства последнее слагаемое с помощью (20), получаем

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\eta}\dot{\eta} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\Phi}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}).$$

Подставляя это равенство в приведенное уравнение баланса энергии (18), получаем

$$\left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{N}_e\right) \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\Phi}} - \mathbf{M}_e\right) \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}) + \left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\eta} - \vartheta\right)\dot{\eta} = 0. \quad (21)$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для произвольных значений векторов $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}$, то отсюда следуют соотношения Коши-Грина

$$\mathbf{N}_e = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{M}_e = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\Phi}}, \quad \vartheta = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\eta}. \quad (22)$$

Кроме того, выбирая в соотношении (19) $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T$, получаем, что фактически внутренняя энергия является функцией следующих аргументов

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\varepsilon}_\times, \boldsymbol{\Phi}_\times, \eta), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\times \equiv \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\Phi}_\times \equiv \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}. \quad (23)$$

Векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\times$ и $\boldsymbol{\Phi}_\times$ называют энергетическими векторами деформации.

Для завершения общей теории осталось задать конкретный вид внутренней энергии и определяющие уравнения для диссипативных усилия \mathbf{N}_d и \mathbf{M}_d . Для термоупругих стержней они равны нулю.

Пример. Осесимметричные колебания кольца. При осесимметричных колебаниях движение кольца задается следующим образом

$$\mathbf{R}(s, t) = [a + w(t)]\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{P}(s, t) = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{V} = \dot{w}(t)\mathbf{n}(s), \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$$

где a есть радиус несущей кривой. Примем, что процесс изотермический, трение и внешние нагрузки отсутствуют

$$\mathcal{F} = \mathbf{N}_d = \mathbf{0}, \quad \mathcal{L} = \mathbf{M}_d = \mathbf{0}, \quad \Omega = 0, \quad \vartheta = \text{const}, \quad \eta = \text{const}.$$

Примем, что несущая линия проходит через центры инерции поперечных сечений кольца, а главные оси инерции поперечного сечения повернуты относительно естественного трехгранника на угол α

$$\mathbf{d}_1 = \cos\alpha\mathbf{n} + \sin\alpha\mathbf{b}, \quad \mathbf{d}_2 = -\sin\alpha\mathbf{n} + \cos\alpha\mathbf{b}. \quad (24)$$

Вычислим инерционные члены в уравнениях (11) и (12)

$$\rho_0\dot{\mathbf{V}} = \bar{\rho}F\dot{w}\mathbf{n} = -\bar{\rho}Fa\ddot{w}\mathbf{t}', \quad \rho_0\dot{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 = -\dot{w}\mathbf{n} \times \mathbf{d} = -\lambda\dot{w}\mathbf{t} = -\alpha\lambda\ddot{w}\mathbf{n}',$$

где

$$\lambda = \bar{\rho} \frac{\sin 2\alpha}{2a} \int_{(F)} (x^2 - y^2) dx dy.$$

Для стержня прямоугольного сечения, после простых преобразований, уравнения движения (11) и (12) принимают следующий вид

$$[\mathbf{N}(s, t) + \bar{\rho} F a \ddot{w}(t) \mathbf{t}(s)]' = \mathbf{0},$$

$$\left[\mathbf{M} - \frac{\bar{\rho} F}{24} (H^2 - h^2) \sin 2\alpha \ddot{w}(t) \mathbf{n}(s) \right]' + \left(1 + \frac{\ddot{w}(t)}{a} \right) \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}.$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая, что возникающие при этом постоянные векторы обязаны равняться нулю, получаем

$$\mathbf{N}(s, t) = -\bar{\rho} F a \ddot{w}(t) \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{M} = \frac{\bar{\rho} F}{24} (H^2 - h^2) \sin 2\alpha \ddot{w}(t) \mathbf{n}(s). \quad (25)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что при $H \neq h$ и $\alpha \neq 0$, вектор момента \mathbf{M} отличен от нулевого вектора. Уравнения (25) полезны при тестировании определяющих уравнений и будут использованы позднее именно для этих целей. Первое уравнение системы (25) приводит к уравнению нелинейного осциллятора

$$\ddot{w}(t) + f(w) = 0,$$

где вид функции $f(w)$ определяется заданием внутренней энергии.

Заметим, что из уравнений (25) следует универсальная связь между усилиями и моментами

$$24a \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} + (H^2 - h^2) \sin 2\alpha \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (26)$$

которая должна выполняться при любом задании внутренней энергии.

Парадокс. Очевидно, что тензор зеркального отражения от плоскости, проходящей через центр кольца ортогонально вектору касательной к несущей линии $\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$ должен принадлежать к группе симметрии всех величин, встречающихся в данной задаче. Однако для вектора усилий имеем $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{N} \neq \mathbf{N}$, т.е. \mathbf{Q} не принадлежит к группе симметрии \mathbf{N} . Решение этого кажущегося парадокса будет приведено ниже.

5 Простейшая форма внутренней энергии

Чтобы не загромождать изложение, ниже будут рассматриваться изотермические процессы при отсутствии диссипации. Для внутренней энергии примем следующую аппроксимацию

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathcal{U}(\mathbf{E}_x, \Phi_x) = & \mathcal{U}_0 + \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{E}_x + \mathbf{M}_0 \cdot \Phi_x + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{B} \cdot \Phi_x + \frac{1}{2} \Phi_x \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi_x + \Phi_x \cdot (\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{D}) \cdot \Phi_x, \end{aligned} \quad (27)$$

где векторы \mathbf{N}_0 , \mathbf{M}_0 , тензоры второго ранга \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и тензор третьего ранга \mathbf{D} определены в отсчетной конфигурации, не зависят от деформации стержня и называются тензорами упругости.

В представлении (27) удержаны не все слагаемые третьего порядка. Повести полный анализ кубических слагаемых несложно, но требует много места. Основной факт

здесь заключается в том, что для стержней, поперечные сечения которых имеют две плоскости симметрии, кубическое по Φ_{\times} слагаемое отсутствует. Удержание линейного по \mathcal{E}_{\times} и квадратичного по Φ_{\times} слагаемого связано с необходимостью учета эффекта Пойнтинга в стержнях. Полный учет кубических слагаемых нецелесообразен еще и потому, что отсутствуют данные по определению входящих в них модулей упругости. Линейные по \mathcal{E}_{\times} и Φ_{\times} слагаемые обычно игнорируются, что иногда ведет к недоразумениям. Действительно, как правило, эти слагаемые малы и могут игнорироваться, но в общем случае их удержание необходимо. Рассмотрим, например, прямолинейный стержень с круговым поперечным сечением, торцы которого стеснены вертикальными стенками без трения. Допустим, что этот стержень нагружен сжимающим нормальным давлением. В этом случае легко убедиться, что векторы деформации \mathcal{E}_{\times} и Φ_{\times} равны нулю, но продольная сила в стержне при этом отлична от нуля.

Представление (27) удобнее переписать в терминах векторов деформации \mathcal{E} и Φ .

$$\rho_0 \mathcal{U}(\mathcal{E}_{\times}, \Phi_{\times}) = \mathcal{U}_0 + \tilde{\mathbf{N}}_0 \cdot \mathcal{E} + \tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \Phi + \\ + \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \Phi + \frac{1}{2} \Phi \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \Phi + \Phi \cdot (\mathcal{E} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) \cdot \Phi, \quad (28)$$

где величины с тильдами

$$(\tilde{\mathbf{N}}_0, \tilde{\mathbf{M}}_0) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0), \quad (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}^T, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \underset{1}{\otimes}^3 \mathbf{P} \odot \mathbf{D}$$

определены в актуальной конфигурации.

Здесь использовано обозначение для тензора \mathbf{S} ранга k

$$\underset{1}{\otimes}^k \mathbf{P} \odot \mathbf{S} \equiv \underset{1}{\otimes}^k \mathbf{P} \odot (S^{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k}) \equiv S^{i_1 \dots i_k} \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{i_k}.$$

Чтобы установить вид тензоров упругости, необходимо воспользоваться теорией симметрии тензоров. Но классическая теория симметрии применима только в неориентированных пространствах, и в рассматриваемом случае ее следует распространить на ориентированные пространства [3]. Включение в теорию таких понятий, как вектор поворота, угловая скорость, вектор момента и т.д. требует введения ориентированного пространства, в котором определены объекты двух типов: полярные и аксиальные объекты. В теории стержней трехмерное ориентированное пространство разложено на прямую сумму одномерного пространства, натянутого на вектор единичной касательной \mathbf{t} , и двумерного пространства, ортогонального \mathbf{t} . В таком расслоенном пространстве можно ввести, в общем случае, три независимых ориентации. Однако для наших целей достаточно ограничиться двумя независимыми ориентациями: ориентацией трехмерного пространства и ориентацией одномерного подпространства. Трехмерное ориентированное пространство будем обозначать символом $E_3^{(o)}$, а одномерное пространство, натянутое на \mathbf{t} , — символом $E_1^{(o)}$. Ориентацию на двумерном пространстве будем определять из условия согласования $E_3^{(o)} = E_1^{(o)} \oplus E_2^{(o)}$.

Определение: объекты, не зависящие от выбора ориентации $E_3^{(o)}$ и $E_1^{(o)}$, называются полярными; объекты, зависящие от ориентации $E_3^{(o)}$ и не зависящие от ориентации $E_1^{(o)}$, называются аксиальными; объекты, не зависящие от выбора

ориентации $E_3^{(o)}$, но зависящие от ориентации $E_1^{(o)}$, называются полярными t -ориентированными; объекты, зависящие от ориентации, как в $E_3^{(o)}$, так и в $E_1^{(o)}$, называются аксиальными t -ориентированными.

В рассматриваемой теории объекты: $\rho_0, \vartheta, \eta, \mathcal{U}, \mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{u}, \mathcal{F}, \mathbf{a}_c, \mathbf{d}, \mathbf{P}, \Theta_2, \mathbf{A}, \mathbf{C}$ являются полярными; $R_t, \psi, \omega, \mathcal{L}, \Theta_1, \mathbf{B}$ — аксиальными; $R_c, \mathbf{N}_0, \mathbf{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_x, \mathbf{D}$ — полярными t -ориентированными; $\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}, \Phi, \Phi_x$ — аксиальными t -ориентированными. Заметим, что дифференцирование по дуге несущей кривой меняет тип объекта. Например, вектор \mathbf{N}' является полярным.

В определение группы симметрии тензора входит определение ортогонального преобразования тензора, которое зависит от типа этого тензора.

Определение: ортогональным преобразованием тензора k -го ранга \mathbf{S} называется тензор \mathbf{S}' , определяемый по формуле

$$\mathbf{S}' \equiv (\mathbf{t} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t})^\beta (\det \mathbf{Q})^\alpha \underset{1}{\otimes}^k \mathbf{Q} \odot \mathbf{S}, \quad (29)$$

где $\alpha = 0, \beta = 0$, если \mathbf{S} полярен; $\alpha = 1, \beta = 0$, если \mathbf{S} аксиален; $\alpha = 0, \beta = 1$, если \mathbf{S} полярен t -ориентирован; $\alpha = 1, \beta = 1$, если \mathbf{S} аксиален t -ориентирован.

Определение: группой симметрии тензора \mathbf{S} называется множество ортогональных тензоров, не меняющих вида тензора \mathbf{S} , т.е. множество ортогональных решений уравнения

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}, \quad (30)$$

где \mathbf{S} задан, а ищутся ортогональные тензоры \mathbf{Q} , причем ортогональное преобразование \mathbf{S}' определено посредством формулы (29).

При определении структуры тензоров упругости, помимо их типа, необходимо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, они зависят от анизотропии материала, из которого изготовлен стержень, и от распределения этого материала по сечению стержня. Далее будет предполагаться, что эти факторы таковы, что они не нарушают симметрии поперечного сечения. Во-вторых, тензоры упругости зависят от геометрии несущей кривой, т.е. от ее вектора Дарбу $\boldsymbol{\tau}$, и от наличия естественной крутки стержня, т.е. от вектора Дарбу оснащения \mathbf{q} . Поскольку эти векторы связаны соотношением (7), то можно считать, что тензоры упругости зависят от $\boldsymbol{\tau}$ и от интенсивности угла крутки φ' . Указанные обстоятельства не позволяют определить тензоры упругости экспериментальными методами, поскольку эксперименты проводятся с конкретными стержнями и, следовательно, определяют тензоры упругости только для этого конкретного стержня. В-третьих, рассматриваются тонкие стержни. Поэтому, если в качестве единицы длины принять наибольший диаметр поперечного сечения стержня, то модуль вектора $\boldsymbol{\tau}$ будет малой величиной.

Итак, все входящие в энергию (27) тензоры упругости представим в виде разложения по вектору $\boldsymbol{\tau}$, определенному формулой (5),

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

причем ограничимся только первыми двумя членами разложения. Коэффициенты \mathbf{f}_0 могут быть найдены из экспериментов с прямолинейными в недеформированном состоянии стержнями.

Используя приведенные выше определения симметрии и типов искомых тензоров, получаем следующие представления для тензоров упругости. Тензор упругости \mathbf{A} полярен и симметричен. Представляя его в виде разложения

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

получаем, что тензор \mathbf{A}_0 является полярным, а тензор \mathbf{A}_1 — аксиален и t -ориентирован. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & A_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3 + \frac{A_{12}}{R_t} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_1) + \\ & + \frac{1}{R_c} [A_{13} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_1) \cos \alpha + A_{23} (\mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2) \sin \alpha], \end{aligned} \quad (31)$$

где смысл угла α установлен формулами (24), $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{t}$, $\mathbf{a} \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Если естественная крутка стержня отсутствует, то к группе симметрии тензоров \mathbf{A}_0 и \mathbf{A}_1 принадлежит зеркальное отражение $\mathbf{E} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$. В этом случае тензор \mathbf{A}_1 равен нулю и выражение (31) резко упрощается.

Аналогичное представление имеет место для полярного тензора \mathbf{C}

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & C_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3 + \frac{C_{12}}{R_t} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_1) + \\ & + \frac{1}{R_c} [C_{13} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_1) \cos \alpha + C_{23} (\mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2) \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (32)$$

Если естественная крутка отсутствует, то $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0$.

Аксиальный тензор \mathbf{B} имеет другую структуру. Чтобы построить этот тензор, необходимо выполнить несколько операций. Сначала представляем \mathbf{B} в виде разложения

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где \mathbf{B}_0 — аксиальный тензор второго ранга, \mathbf{B}_1 — t -ориентированный тензор третьего ранга.

Аксиальный тензор \mathbf{B}_0 отвечает за естественную крутку стержня. Кажется разумным потребовать, чтобы он линейно зависел от вектора $\varphi' \mathbf{t}$. В таком случае имеем

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_* \cdot \varphi' \mathbf{t} = \varphi' (V_{01} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + V_{02} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + V_{03} \mathbf{t} \mathbf{t}),$$

где V_{01} , V_{02} , V_{03} суть абсолютные скаляры, отвечающие за эффекты, связанные с естественной круткой стержня, φ' — аксиальный скаляр.

Интуитивно ясно, что существенным является только модуль V_{03} , отвечающий за связанность растяжения и кручения. Модули V_{01} и V_{02} связывают деформации поперечного сдвига и изгиб несущей линии, и, видимо, могут игнорироваться. Именно так мы и будем считать, т.е. тензор \mathbf{B}_0 примем в следующем виде

$$\mathbf{B}_0 = \varphi' V_0 \mathbf{t} \mathbf{t}. \quad (33)$$

Видим, что для естественно закрученных стержней эффект Пойнтинга проявляется уже в линейной теории. Этот факт важен при анализе работы ударно-сверлильных машин.

Общий вид тензора \mathbf{B} с учетом естественной закрутки имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \varphi' B_0 \mathbf{t} \mathbf{t} + \frac{1}{R_t} [B_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + B_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + B_3 \mathbf{t} \mathbf{t} + \varphi' (b_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + b_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2) \times \mathbf{t}] + \\ & + \frac{1}{R_c} [(B_{13} \mathbf{d}_1 \sin \alpha + B_{23} \mathbf{d}_2 \cos \alpha) \mathbf{t} + \mathbf{t} (B_{31} \mathbf{d}_1 \sin \alpha + B_{32} \mathbf{d}_2 \cos \alpha)] + \\ & + \frac{\varphi'}{R_c} [(b_{13} \mathbf{d}_1 \cos \alpha + b_{23} \mathbf{d}_2 \sin \alpha) \mathbf{t} + \mathbf{t} (b_{31} \mathbf{d}_1 \cos \alpha + b_{32} \mathbf{d}_2 \sin \alpha)]. \quad (34) \end{aligned}$$

Если естественная крутка стержня отсутствует, то $\varphi' = 0$. Если поперечное сечение стержня есть правильный многоугольник или круг, то можно немного упростить это выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \varphi' B_0 \mathbf{t} \mathbf{t} + \frac{1}{R_t} [B_1 (\mathbf{E} - \mathbf{t} \mathbf{t}) + B_3 \mathbf{t} \mathbf{t} + \varphi' b_1 \mathbf{E} \times \mathbf{t}] + \\ & + \frac{1}{R_c} [B_{13} (\mathbf{d}_1 \sin \alpha + \mathbf{d}_2 \cos \alpha) \mathbf{t} + B_{31} \mathbf{t} (\mathbf{d}_1 \sin \alpha + \mathbf{d}_2 \cos \alpha)] + \\ & + \frac{\varphi'}{R_c} [b_{13} (\mathbf{d}_1 \cos \alpha + \mathbf{d}_2 \sin \alpha) \mathbf{t} + b_{31} \mathbf{t} (\mathbf{d}_1 \cos \alpha + \mathbf{d}_2 \sin \alpha)]. \end{aligned}$$

Кроме того, для круглого сечения обязаны равняться нулю модули B_0 , B_1 , B_2 , B_{13} , B_{31} , B_{23} , B_{32} , поскольку повернутое сечение в этом случае не отличается от неповернутого. Учитывая это обстоятельство и вспоминая выражения (24), последнее представление переписываем в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_t} [B_1 (\mathbf{E} - \mathbf{t} \mathbf{t}) + B_3 \mathbf{t} \mathbf{t}] + \frac{1}{R_c} [B_{13} \mathbf{b} \mathbf{t} + B_{31} \mathbf{t} \mathbf{b}], \quad (35)$$

где следует обратить внимание, что вектор бинормали \mathbf{b} аксиален.

Выпишем свертку тензора \mathbf{B} с вектором деформации растяжения-сдвига

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{B} = & \varphi' B_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{t} + \frac{1}{R_t} [B_1 \Gamma_1 \mathbf{d}_1 + B_2 \Gamma_2 \mathbf{d}_2 + B_3 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{t} + \varphi' (b_1 \Gamma_1 \mathbf{d}_1 + b_2 \Gamma_2 \mathbf{d}_2) \times \mathbf{t}] + \\ & + \frac{1}{R_c} [(B_{13} \Gamma_1 \sin \alpha + B_{23} \Gamma_2 \cos \alpha) \mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon} (B_{31} \mathbf{d}_1 \sin \alpha + B_{32} \mathbf{d}_2 \cos \alpha)] + \\ & + \frac{\varphi'}{R_c} [(b_{13} \Gamma_1 \cos \alpha + b_{23} \Gamma_2 \sin \alpha) \mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon} (b_{31} \mathbf{d}_1 \cos \alpha + b_{32} \mathbf{d}_2 \sin \alpha)]. \quad (36) \end{aligned}$$

Поскольку деформации поперечного сдвига, как правило, малы, то при отсутствии естественной крутки существенными, видимо, являются только модули B_3 , B_{31} , B_{32} . Нетрудно установить общий вид \mathbf{t} -ориентированного тензора \mathbf{D} , но, видимо, в этом нет особой необходимости. Мы ограничимся той его частью, которая не зависит от вектора Дарбу несущей кривой

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} = & \boldsymbol{\varepsilon} (D_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + D_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + D_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3) + \\ & + \Gamma_1 D_{13} (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_1) + \Gamma_2 D_{23} (\mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2). \end{aligned}$$

Кубические члены в энергии, если и существенны, то только при очень больших поворотах, либо для эластомеров. При больших поворотах тонкого металлического стержня деформации поперечного сдвига пренебрежимо малы. Поэтому предыдущее выражение допустимо принимать в упрощенном виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} = \varepsilon (D_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + D_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + D_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3). \quad (37)$$

Простейшая теория стержней без естественной крутки, описывающая эффект Пойнтинга, дается следующими значениями модулей

$$D_1 = D_2 = 0, \quad D_3 = C_3,$$

где C_3 есть жесткость стержня на кручение.

При дальнейшем анализе кубические члены в энергии будем игнорировать, поскольку в настоящее время необходимость их учета не вполне ясна. Величины $A_1, \dots, A_{23}; C_1, \dots, C_{23}$ и т.д. называются упругими модулями и зависят только от упругих постоянных материала, распределения материала по сечению стержня, формы и размеров поперечного сечения.

Представленная выше технология не пригодна для нахождения векторов \mathbf{N}_0 и \mathbf{M}_0 , которые, в отличие от тензоров упругости, характеризуют не только свойства стержня, но и внешние нагрузки, действующие на боковую поверхность стержня. Можно утверждать, что они линейно зависят от внешних нагрузок. Как правило, их влияние пренебрежимо мало. Однако их игнорирование может привести к недоразумениям при определении значений упругих модулей.

6 Определение упругих модулей

Естественно закрученные стержни встречаются относительно редко. Поэтому вначале будем считать, что естественная крутка отсутствует. Кроме того, отбросим кубические члены в энергии. В таком случае тензоры упругости \mathbf{A} и \mathbf{C} принимают простой относительно вид

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3. \quad (38)$$

Тензоры упругости \mathbf{A} и \mathbf{C} могут быть найдены из экспериментов с прямолинейными стержнями. Тензор упругости \mathbf{B} тоже упрощается, но незначительно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_t} (B_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + B_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + B_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3) + \frac{1}{R_c} [(B_{23} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + B_{32} \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2) \cos \alpha + (B_{13} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_3 + B_{31} \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_1) \sin \alpha]. \quad (39)$$

Поскольку тензоры упругости \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} не зависят от деформации, то они могут быть найдены по данным линейной теории. Модули $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ могут быть определены по экспериментам с прямолинейными стержнями. Модули $B_{13}, B_{31}, B_{23}, B_{32}$ могут быть найдены по экспериментам с плоскими искривленными стержнями. Модули B_1, B_2, B_3 могут быть найдены только по экспериментам

с пространственно искривленными стержнями. Основное затруднение при определении упругих модулей связано с тем, что они зависят от формы поперечного сечения стержня. Частично задача по определению упругих модулей стержней уже решена. В частности, для однородных стержней из изотропного материала определены жесткости стержня на растяжение A_3 и поперечный сдвиг — модули A_1 и A_2

$$A_3 = E F, \quad A_1 = k_1 G F, \quad A_2 = k_2 G F, \quad (40)$$

где E — модуль Юнга, $G = E/2(1 + \nu)$ — модуль сдвига материала стержня.

Безразмерные коэффициенты k_1 и k_2 в (40) называются коэффициентами поперечного сдвига и, в принципе, зависят от формы поперечного сечения. При определении модулей упругости следует иметь в виду, что они являются физическими характеристиками стержня. Поэтому их следует определять через некие физические характеристики, не зависящие от того рассматриваем ли мы данное тело как трехмерное или как одномерное (стержень). Наиболее подходящими характеристиками такого рода являются низшие собственные частоты, которые легко измеряются экспериментально. Можно использовать и мысленные (численные) эксперименты. Собственные частоты можно найти по трехмерной теории упругости, которая позволяет определять частоты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. Собственные частоты можно найти и по теории стержней, они будут выражаться через модули упругости. Требуя совпадения собственных частот, найденных по разным теориям, получаем условия, из которых определяются упругие модули. Проиллюстрируем сказанное на примере определения коэффициентов поперечного сдвига.

Рассмотрим следующую динамическую задачу для призматического тела, занимающее область: $-h/2 \leq x \leq h/2$, $-H/2 \leq y \leq H/2$, $0 \leq z \leq l$. Оси декартовой системы координат выберем так что: $\mathbf{i} = \mathbf{d}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{d}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{t}$. Пусть боковая поверхность призмы свободна от напряжений, а на торцах заданы следующие условия

$$z = 0, l: \quad \mathbf{u}_{(3)} \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{u}_{(3)} \cdot \mathbf{d}_2 = 0, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

где $\mathbf{u}_{(3)}$ и \mathbf{T} суть вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерной среде соответственно.

Рассмотрим сдвиговые колебания призмы следующего вида

$$\mathbf{u}_{(3)} = W e^{i\omega t} \sin \lambda x \mathbf{t}, \quad \mathbf{T} = G \lambda W e^{i\omega t} \cos \lambda x (\mathbf{t} \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1 \mathbf{t}), \quad \lambda = (2k + 1)\pi/h,$$

где ω — частоты собственных колебаний.

Эти выражения удовлетворяют краевым условиям. Осталось подчинить их уравнениям движения, из которых и находятся собственные частоты

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_{(3)} \Rightarrow \omega^2 = \frac{G}{\bar{\rho}} \frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{h^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

Рассмотрим эту же задачу с точки зрения теории стержней. Ей соответствуют следующие представления основных величин

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \psi = \psi_2 \mathbf{d}_2 = \text{const}, \quad \mathbf{N} = N_1 \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}.$$

Векторы деформации имеют вид

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{u}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi} = -\psi_2 \mathbf{d}_1, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\psi}' = \mathbf{0}$$

Соотношения Коши–Грина дают

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = -A_1 \psi_2 \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Уравнения движения для данной задачи имеют вид

$$\mathbf{N}'(s, t) = \mathbf{0}, \quad -A_1 \psi_2 \mathbf{d}_2 = \Theta_2 \ddot{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{d}_2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{A_1}{\Theta_2}, \quad \Theta_2 = \bar{\rho} F \frac{h^2}{12}. \quad (42)$$

Сравнивая частоты, найденные по трехмерной теории (41), и частоту, найденную по теории стержней (42), видим огромное различие. Трехмерная теория дает целый спектр сдвиговых колебаний, в то время как теория стержней дает всего одну частоту. Это и не удивительно, ибо область применимости трехмерной теории несоизмеримо больше области применимости теории стержней. Последняя может претендовать на хорошее описание только относительно низкочастотных колебаний. Заметим, что сдвиговые колебания — это уже высокочастотные колебания, их частоты стремятся к бесконечности при $h \rightarrow 0$. В то время как частоты изгибных колебаний стержня стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$, а частоты продольных колебаний ограничены при $h \rightarrow 0$. Поэтому вполне естественно, что теория стержней не позволяет описать весь сдвиговой спектр, но она может описать низшую частоту из спектра (41). Для этого достаточно принять

$$\frac{A_1}{\Theta_2} = \frac{G}{\bar{\rho}} \frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi^2}{12} GF \Rightarrow k_1 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Рассматривая сдвиговые колебания в другой плоскости, получаем, что $k_1 = k_2$. Таким образом, для стержней прямоугольного сечения коэффициенты поперечного сдвига определены и все жесткости в (40) выражены через известные характеристики. Кроме того, из сравнения (41) и (42) видим, что частотный диапазон, описываемый теорией стержней заведомо ограничен сверху неравенством

$$\omega^2 < \frac{G}{\bar{\rho}} \frac{9\pi^2}{h^2} \Rightarrow \omega < \frac{3\pi}{h} \sqrt{\frac{G}{\bar{\rho}}}. \quad (43)$$

Для тонких стержней ограничение (43) является очень слабым, ибо типичные частоты колебаний стержневых систем заведомо удовлетворяют ограничению (43).

Полезно рассмотреть некий кажущийся парадокс, связанный с определением коэффициента поперечного сдвига. Попробуем определить его из точного решения статической задачи о чистом сдвиге призматического стержня, которое дается формулами

$$\mathbf{T} = \tau (\mathbf{t} \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1 \mathbf{t}), \quad \mathbf{G} \mathbf{u}_{(3)} = \tau \mathbf{x} \mathbf{t}.$$

Используя формулы, связывающие смещения и повороты точек стержня с вектором перемещений частиц трехмерной среды, получаем

$$\mathbf{N} = \tau F \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G} \boldsymbol{\psi} = -\tau \mathbf{d}_2.$$

С другой стороны, вектор усилий связан с вектором деформации посредством соотношений упругости

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi}) \Rightarrow \tau F = -A_1 \mathbf{d}_2 \cdot \boldsymbol{\psi} \Rightarrow k_1 = 1. \quad (44)$$

Получили значение коэффициента поперечного сдвига, которое отличается от полученного ранее. Оба они получены из сравнений точных решений. С практической точки зрения это обстоятельство, как правило, несущественно, ибо влияние поперечного сдвига заметно сказывается далеко не во всех задачах. Например, переход от теории, учитывающей сдвиг, к классической теории стержней осуществляется посредством предельного перехода $k_1, k_2 \rightarrow \infty$. Тем не менее, с теоретической точки зрения этот факт неприятен и хотелось бы понять причину подобного расхождения в определении коэффициента поперечного сдвига. Ответ прост: на самом деле никакого расхождения нет. Значение $k_1 = 1$ было получено, хотя и из точного решения, но некорректно. Следует еще раз обратиться к выражению для внутренней энергии (27). В него входят векторы \mathbf{N}_0 и \mathbf{M}_0 , относительно которых известно только то, что они являются линейными функционалами нагрузок, действующими на боковую поверхность стержня. К сожалению, в отличие от теории оболочек, в теории стержней общий вид этих функционалов пока не установлен. Ясно только то, что векторы \mathbf{N}_0 и \mathbf{M}_0 отличны от нуля. Поэтому равенства (44) следовало записать в следующем виде

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi}) \Rightarrow \mathbf{N}_0 = \tau F (1 - k_1) \mathbf{d}_1.$$

Таким образом, задача о чистом сдвиге не позволяет вычислить коэффициент поперечного сдвига, но позволяет установить вектор \mathbf{N}_0 в данной задаче. В других задачах вид вектора \mathbf{N}_0 будет другим. Из всего сказанного следует общий вывод о том, что *модули упругости должны определяться из задач, в которых действуют только краевые, но не поверхностные, нагрузки*. С физической точки зрения этот вывод очевиден. Действительно, приложением поверхностных нагрузок можно вызвать в стержне какие угодно деформации. При этом свойства самого стержня отходят на второй план. При действии краевых нагрузок деформации стержня определяются свойствами стержня и ничем другим. Насколько важен учет векторов \mathbf{N}_0 и \mathbf{M}_0 в практических задачах? Как правило, совершенно не важен, исключая задачи типа рассмотренной выше. Дело в том, что учет векторов \mathbf{N}_0 и \mathbf{M}_0 определяет напряжения в стержне, которые остаются ограниченными при стремлении площади поперечного сечения к нулю. Однако напряжения, типичные для стержневых систем, при стремлении площади поперечного сечения к нулю стремятся к бесконечности. Иными словами, поправки, вносимые векторами \mathbf{N}_0 и \mathbf{M}_0 , как правило пренебрежимо малы.

В теории оболочек удастся доказать, что коэффициент поперечного сдвига лежит в интервале

$$\pi^2/12 \leq k < 1.$$

Аналогичный результат в теории стержней не доказан, но можно думать, что он остается справедливым. Отметим, что в теории пластин предложены различные значения коэффициента поперечного сдвига: $k = 5/6$ (Э. Рейсснер, 1944), $k = \pi^2/12$ (Р. Миндлин, 1951), $k = 5/(6 - \nu)$ (П. Жилин, 1983). Последнее значение рекомендуется в задачах с ярко выраженным изгибом. Например, при вычислении собственных частот изгибных колебаний стержня.

Обратимся к определению модулей C_3 , C_1 , C_2 . Эти модули носят названия: C_3 — жесткость стержня на кручение, C_1 и C_2 — жесткости стержня на изгиб. Как уже отмечалось, они могут быть установлены в экспериментах с прямолинейными стержнями. Определение жесткостей прямолинейного незакрученного стержня представляет собой давно решенную проблему, но за деталями следует обратиться к специальной литературе. Проще всего находятся жесткости стержня на изгиб. Для стержней из однородного изотропного материала они определяются по формулам, установленным еще Г. Кирхгофом (1859)

$$C_1 = E J_1, \quad C_2 = E J_2, \quad J_1 \equiv \int_{(F)} y^2 dx dy, \quad J_2 \equiv \int_{(F)} x^2 dx dy, \quad (45)$$

где E — модуль Юнга материала стержня, J_1 и J_2 — моменты инерции поперечного сечения стержня.

Для неоднородных, например многослойных, стержней формулы для изгибных жесткостей меняются, но этот вопрос оставим в стороне. При решении прикладных задач теории стержней конкретный вид модулей упругости не имеет значения. Они важны только при определении величины, но не вида, напряжений, т.е. это важный, но сугубо прикладной аспект проблемы.

Явную формулу для жесткости стержня на кручение указать нельзя. Но методика ее определения хорошо разработана и приводится в справочниках [4]. В общем случае жесткость на кручение стержня с односвязным поперечным сечением определяется по формуле

$$C_3 = G J_r, \quad J_r = 2 \int_{(F)} U(x, y) dx dy, \quad \Delta U = -2, \quad U = 0 \text{ на } \partial F, \quad (46)$$

где J_r есть так называемая геометрическая жесткость на кручение.

Например, для стержня эллиптического сечения имеем

$$U(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \Rightarrow C_3 = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G,$$

где a , b — полуоси эллипса.

Можно доказать следующую оценку (Е.Л. Николаи)

$$C_3 = G J_r \leq G \frac{4J_1 J_2}{J_p}, \quad J_p \equiv \int (x^2 + y^2) dx dy,$$

где J_p есть полярный момент инерции.

Знак равенства достигается для стержней эллиптического сечения. Максимальной жесткостью на кручение обладают стержни кругового сечения. Для многосвязных сечений приведенные выше формулы требуют небольшой модификации [4]. Отметим, что изложенную выше методику определения геометрической жесткости на кручение J_r разработал Барри де Сен-Венан (1879).

Обратимся к определению модулей, входящих в тензор \mathbf{B} . В известной автору литературе они не определены. Исключением является модуль B_0 , который может быть

найден и на самом деле определен из мысленных экспериментов с прямолинейными естественно закрученными стержнями. Чтобы яснее представить себе роль, которую играет модуль B_0 , рассмотрим растяжение естественно закрученного прямолинейного стержня. Необходимыми условиями положительности энергии деформации в этом случае являются неравенства

$$A_i > 0, \quad C_i > 0, \quad A_3 C_3 > \varphi'^2 B_0^2.$$

Последнее из этих неравенств налагает ограничение на величину естественной кривизны стержня. Поскольку модули могут быть найдены по линейной теории, то рассмотрим малые растяжения естественно закрученного стержня. Имеем очевидные равенства

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} = \varepsilon' \mathbf{t} \equiv \varepsilon \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \psi' \mathbf{t}.$$

По условиям статики и соотношениям упругости имеем

$$\mathbf{N} \mathbf{t} = (A_3 \varepsilon + \varphi' B_0 \psi') \mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = (\varepsilon \varphi' B_0 + C_3 \psi') \mathbf{t} = \mathbf{0}.$$

Решая эту систему относительно ε и ψ' , получаем

$$\varepsilon = \frac{C_3 N}{A_3 C_3 - \varphi'^2 B_0^2}, \quad \psi' = -\frac{N}{A_3 C_3 - \varphi'^2 B_0^2} \varphi' B_0 \quad \Rightarrow \quad B_0 > 0.$$

Последнее неравенство следует из физически очевидного требования, чтобы при растяжении стержень раскручивался. В литературе [4] предложена следующая формула для B_0

$$B_0 = E (J_p - J_r) \geq 0, \quad (47)$$

причем знак равенства достигается только для стержней круглого сечения.

В существующих теориях стержней, не обладающих естественной кривизной, принято, что $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. С прикладной точки зрения это, видимо, не ведет к существенной погрешности. Однако этот вопрос требует более тщательного анализа. Игнорирование тензора \mathbf{B} интуитивно можно оправдать следующим образом. Массовая плотность внутренней энергии есть локальная характеристика стержня. Локально не слишком сильно изогнутые стержни почти не отличаются от прямолинейных стержней. Поэтому разумно допустить, что массовая плотность внутренней энергии стержня не зависит от кривизны и кручения несущей линии. С другой стороны, сравнения с немногими точными решениями трехмерной теории упругости не подтверждают допущения о возможности игнорирования тензора \mathbf{B} , особенно при определении перемещений. Поэтому определение тензора \mathbf{B} представляется желательным или даже необходимым. Например, из представления (36) и равенства (26) вытекает следующее соотношение для модулей

$$B_{32} = E J_4 + B_{31}, \quad J_4 \equiv \int (x^2 - y^2) dx dy. \quad (48)$$

Поэтому принятие условия $B_{32} = B_{31} = 0$, вообще говоря, ведет к противоречию. Чтобы определить модуль B_{32} , достаточно рассмотреть задачу Ламе для полого цилиндра малой высоты H , нагруженного внутренним давлением [5]. Простые вычисления (смотри следующий пункт) дают следующее значение модуля $B_{32} = C_2$. С учетом

связи (48) окончательно получаем

$$B_{32} = C_2, \quad B_{31} = C_1.$$

К сожалению, об остальных модулях, входящих в тензор \mathbf{B} в настоящее время нельзя сказать ничего определенного. Интуитивно кажется, что для большинства практических потребностей вместо общего выражения (34) достаточно принять тензор \mathbf{B} в следующем виде

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \mathbf{t}\mathbf{t} + \frac{1}{R_t} B_3 \mathbf{t}\mathbf{t} + \frac{1}{R_c} \mathbf{t} (C_1 \mathbf{d}_1 \sin \alpha + C_2 \mathbf{d}_2 \cos \alpha).$$

В другой записи этому представлению можно придать вид

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \mathbf{t}\mathbf{t} + \frac{1}{R_t} B_3 \mathbf{t}\mathbf{t} + \frac{1}{R_c} \mathbf{t} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}. \quad (49)$$

Модуль B_3 здесь остался неопределенным, и сделать вывод о его роли можно только на основе решения ряда задач для пространственно изогнутых стержней. Этот вопрос требует более тщательного анализа.

7 Продольно-крутильные волны в стержне.

Если стержень имеет естественное кручение, то продольные и крутильные деформации оказываются связанными, и задача сводится к интегрированию следующей системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{\varphi' B_0}{EF} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{c_t^2} \mathcal{F}_t = 0, \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\varphi' B_0}{GJ_r} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} + \frac{\rho F}{GJ_r} \mathcal{L}_t = 0, \quad c_t^2 = \frac{GJ_r}{\rho J_p}. \quad (51)$$

Если естественная крутка отсутствует, т.е. $\varphi' = 0$, то система (50) – (51) распадается на два независимых уравнения, а продольные и крутильные деформации находятся независимо друг от друга

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{1}{c_t^2} \mathcal{F}_t = 0, \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\rho F}{GJ_r} \mathcal{L}_t = 0, \quad c_t^2 = \frac{GJ_r}{\rho J_p}. \quad (53)$$

Из уравнений (52), (53) видим, что c_l есть скорость распространения продольных волн, а c_t — скорость распространения волн кручения, причем $c_l > c_t$. Покажем, что решение связанной системы (50) – (51) может быть выражено через решения волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_1} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0, \quad (54)$$

где введены новые неизвестные заранее параметры Ω_1 и Ω_2 .

Общее решение однородной системы (50) – (51) имеет вид

$$\mathbf{u}(s, t) = \mathbf{v}(s, t) + \frac{\gamma_1 c_t^2}{\Omega_2 - c_t^2} \vartheta(s, t), \quad \psi(s, t) = \vartheta(s, t) + \frac{\gamma_2 c_t^2}{\Omega_1 - c_t^2} \mathbf{v}(s, t), \quad (55)$$

где

$$\gamma_1 \equiv \frac{\varphi' B_0}{EF}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{\varphi' B_0}{GJ_r},$$

\mathbf{v} и ϑ суть общие решения волновых уравнений (54)

Параметры Ω_1 и Ω_2 находятся как корни уравнения

$$\Omega_1^2 - (c_t^2 + c_t^2)\Omega_1 + (1 - \gamma_1 \gamma_2)c_t^2 c_t^2 = 0, \quad \Omega_2 < c_t^2, \quad \Omega_1 > c_t^2, \quad c_t^2 < c_t^2.$$

Итак, наличие крутки в стержне не меняет характера волнового процесса в стержне. Это по-прежнему волны без дисперсии, но наличие крутки меняет скорость распространения волн в стержне. Продольно-крутильная волна является решением первого из уравнений (54), причем скорость ее распространения $\sqrt{\Omega_1}$ оказывается выше скорости распространения продольной волны в стержне без крутки. Крутильно-продольная волна является решением второго из уравнений (54), причем скорость ее распространения $\sqrt{\Omega_2}$ оказывается ниже скорости распространения волны кручения в стержне без крутки.

8 Нелинейный изгиб заземленной балки

Выше мы видели, что учет деформации поперечного сдвига в статических задачах для тонких стержней не играет большой роли. Сейчас мы хотим выяснить роль учета нелинейности. Действительно, в линейной теории задачи изгиба и растяжения разделяются. Поэтому продольная сила в стержне не участвует в процессе изгиба. Между тем, интуитивно ясно, что при изгибе заземленного стержня в нем возникает продольная сила и притом весьма значительная. Например, при очень малой жесткости на изгиб стержень мало отличается от нити, в которой растягивающее усилие играет определяющую роль. Поэтому ее игнорирование нуждается в обосновании.

Будем рассматривать изгиб стержня в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{t} и \mathbf{d}_1 . Внешнюю нагрузку примем в виде

$$\rho_0 \mathcal{F} = p \mathbf{n}, \quad p = \text{const},$$

где \mathbf{n} есть нормаль к деформированной несущей линии.

Считаем, что торцы стержня закреплены от смещений и поворотов

$$s = -l/2: \mathbf{R} = -(l/2)\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l/2: \mathbf{R} = (l/2)\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

При плоском изгибе сечения стержня поворачиваются только вокруг \mathbf{d}_2 . Поэтому имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{d}_2) \Rightarrow \Phi = \psi' \mathbf{d}_2.$$

Соотношения упругости принимаем в форме

$$\mathbf{N} = A\varepsilon \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} + Q\bar{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \Phi = C_2 \psi' \mathbf{d}_2. \quad (56)$$

Точные (нелинейные) уравнения статики записываются в виде

$$A\varepsilon' = Q\psi', \quad A\varepsilon\psi' + Q' + p = 0, \quad C_2\psi'' + (1 + \varepsilon)Q = 0. \quad (57)$$

Прежде, чем продолжить решение задачи об изгибе стержня, рассмотрим случай очень малой жесткости стержня на изгиб $C_2 \approx 0$, т.е. рассмотрим струну. В этом случае третье и первое уравнения системы (57) дают $Q = 0$, $A\varepsilon = T_0 = \text{const}$. Второе уравнение из (57) позволяет найти угол поворота

$$\psi(s) = -ps/T_0. \quad (58)$$

Чтобы найти продольное усилие T_0 в струне, нужно воспользоваться краевыми условиями. Имеем

$$\mathbf{R}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = (1 + \varepsilon)(\cos \psi \mathbf{t} + \sin \psi \mathbf{d}_1)$$

Интегрируя это равенство по интервалу $[-l/2, l/2]$, после простых преобразований получаем

$$\frac{pl}{2T_0} = \left(1 + \frac{T_0}{A}\right) \sin\left(\frac{pl}{2T_0}\right). \quad (59)$$

Обратим внимание, что, несмотря на малость величины T_0/A в сравнении с единицей, пренебрегать этой величиной нельзя, ибо тогда уравнение (59) не имеет решения, кроме тривиального. Уравнение (59) перепишем в другой форме

$$x^2 = (x + \gamma) \sin x, \quad x \equiv pl/(2T_0), \quad \gamma \equiv pl/(2A).$$

В этом уравнении γ есть малая величина. Легко видеть, что и единственное решение этого уравнения есть малая величина. Поэтому функцию $\sin x$ можно разложить в ряд по x и ограничиться первыми двумя членами. В результате этой операции получим следующее уравнение

$$x^3 + \gamma x^2 - 6\gamma = 0 \Rightarrow x \simeq \sqrt[3]{3pl/A}. \quad (60)$$

Поскольку $pl/A \ll 1$, то x мало, и все принятые ранее допущения выполнены. Для продольной силы получили следующее значение

$$T_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{Ap^2l^2} \Rightarrow \psi(s) = -\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}} \frac{s}{l}. \quad (61)$$

Угол поворота в решении для струны, естественно, не удовлетворяет исходному краевому условию для балки и не обращается в нуль на концах интервала. Чтобы выполнить краевое условие для угла поворота, необходимо учесть жесткость балки на изгиб. Иными словами, необходимо вернуться к системе (57). Она допускает точное решение в эллиптических функциях, но мы ограничимся приближенным решением.

Поскольку относительное удлинение является малым, то ε в последнем уравнении системы (57) может быть отброшено в сравнении с единицей. Исключая из первого уравнения системы (57) поперечную силу Q , находим первый интеграл

$$A\varepsilon = T_0 - \frac{1}{2}C_2\psi'^2, \quad T_0 = \text{const.} \quad (62)$$

Используя (62), второе уравнение системы (57) переписываем в виде

$$-C_2\psi'''' + T_0\psi' - \frac{1}{2}C_2\psi'^3 + p = 0. \quad (63)$$

Осталось определить постоянную T_0 . Для определения T_0 служат краевые условия. Имеем равенство

$$\mathbf{R}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = (1 + \varepsilon)(\cos \psi \mathbf{t} + \sin \psi \mathbf{d}_1).$$

Вычисляя интегралы от обеих частей этого равенства по интервалу $[-l/2, l/2]$ с учетом нечетности функции $\psi(s)$ и четности функции $\varepsilon(s)$, получаем следующее условие

$$l = 2 \int_0^{l/2} [1 + \varepsilon(s)] \cos \psi(s) ds = 2 \int_0^{l/2} \cos \psi(s) ds + 2 \int_0^{l/2} \varepsilon(s) \cos \psi(s) ds.$$

Поскольку повороты и растяжения являются малыми, то $\cos \psi(s)$ можно разложить в ряд по $\psi(s)$ и удержать только главные члены. Тогда получим

$$\int_0^{l/2} \varepsilon(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \psi^2(s) ds.$$

Исключая из этого равенства относительное удлинение $\varepsilon(s)$ с помощью соотношения (62), получаем уравнение для определения постоянной T_0

$$l T_0 = \int_0^{l/2} (A\psi^2 + C_2\psi'^2) ds \quad (64)$$

Теперь мы в состоянии определить порядок всех величин, входящих в уравнение (63). С этой целью введем в рассмотрение безразмерную независимую переменную $s = l\xi$. Кроме того, будем использовать следующее представление для жесткости на изгиб $C_2 = Ah^2/12$, справедливое для балки прямоугольного поперечного сечения. В этих обозначениях равенство (64) переписывается в следующей форме

$$\frac{T_0}{A} = \int_0^{1/2} (\psi^2 + h_*^2\psi'^2) d\tau, \quad \psi \equiv \frac{d\psi}{d\xi}, \quad h_*^2 \equiv \frac{h^2}{12l^2} \ll 1. \quad (65)$$

Уравнение (63) также перепишем в безразмерной форме

$$h_*^2 \left[\frac{d^3\psi}{d\xi^3} + \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^3 \right] - \int_0^{1/2} (\psi^2 + h_*^2\psi'^2) d\tau \frac{d\psi}{d\xi} = \eta, \quad \eta \equiv \frac{pl}{A}. \quad (66)$$

Уравнение (66) содержит два малых параметра h_*^2 и η и является существенно нелинейным. Оно допускает простое решение в двух предельных случаях: линейное приближение и струнное приближение. Найдем условия применимости обоих указанных случаев.

Линейное приближение

$$h_*^2 \frac{d^3 \psi}{d\xi^3} = \eta, \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{\eta}{6h_*^2} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \xi. \quad (67)$$

Подставляя это решение в уравнение (66) и оставляя в нем только главное из отброшенных нелинейных слагаемых, получаем

$$\eta + \frac{4}{105} \left(\frac{\eta}{24h_*^2} \right)^3 \left(\frac{1}{4} - 3\xi^2 \right) = \eta \quad \Rightarrow \quad 1 \ll \left(\frac{l}{h} \right)^4 \ll 10 \frac{E}{p_0}, \quad (68)$$

где $p = p_0 H$, т.е. p_0 — это давление, действующее на балку.

Левая граница последнего неравенства выражает условие применимости теории стержней. Модуль Юнга E для стали примерно равен $2 \cdot 10^7$ н/см². Если давление p_0 есть величина порядка одной атмосферы (10 н/см²), то неравенство (68) сводится к условию $1 \ll l/h \ll 10 \sqrt[4]{2000} \simeq 67$. Полученное ограничение является довольно сильным, но следует указать, что оно получено для самой неблагоприятной ситуации. На практике осуществить условия жесткой заделки почти невозможно, да к этому и не стремятся. Податливость заделки приводит к значительному увеличению правой границы неравенства (68) в силу уменьшения продольной силы в стержне.

Оценим точность выполнения уравнения (66), если в него подставить струнное приближение (61). Выполняя эту операцию, получаем

$$-\frac{h_*^2 p_0 l}{24 E h} + \sqrt[3]{\frac{1}{24} \frac{p_0 l}{E h}} = \frac{p_0 l}{E h} \quad \Rightarrow \quad h_*^2 \ll 4 \sqrt[3]{9}.$$

Иными словами, приближение струны является практически точным решением уравнения (66), но оно не удовлетворяет краевым условиям для угла поворота. Тем не менее, сравним максимальные значения нормального прогиба балки, найденного по линейной теории (формула (67)) и по струнному приближению (61)

$$w' = \psi(s) = -\sqrt[3]{\frac{pl}{24A} \frac{s}{l}} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{pl}{24A} \left(1 - \frac{4s^2}{l^2} \right)}.$$

Максимальные значения прогиба для балки $w_b^{(\max)}$ и для струны $w_s^{(\max)}$ вычисляются по формулам

$$w_b^{(\max)} = \frac{l}{32} \frac{l^3}{h^3} \frac{p_0}{E}, \quad w_s^{(\max)} = \frac{l}{16 \sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{\frac{l}{h} \frac{p_0}{E}}.$$

Как видим, зависимость максимальных значений прогибов от параметров задачи в рассматриваемых предельных случаях существенно различаются. Вместе с тем в обоих предельных случаях оказалось возможным отбросить в уравнении (66) слагаемое $h_*^2 (d\psi/d\xi)^3$. Поэтому можно предположить, что это слагаемое можно отбросить

и в общем случае. Так мы и поступим, а затем покажем, что это оправдано. После указанного отбрасывания и однократного интегрирования уравнение (66) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \lambda^2\psi = \lambda^2\gamma\xi, \quad \lambda^2 \equiv \frac{12l^2T_0}{h^2A}, \quad \gamma \equiv \frac{p_0Hl}{T_0}. \quad (69)$$

Решение уравнения (69), удовлетворяющее краевым условиям дается выражением

$$\psi(s) = -\frac{pl}{2T_0} \left[\frac{2s}{l} - \frac{\text{sh } \lambda s}{\text{sh}(\lambda l/2)} \right], \quad \lambda^2 \equiv \frac{T_0}{C_2}, \quad -\frac{l}{2} \leq s \leq \frac{l}{2}. \quad (70)$$

Здесь мы вернулись к исходным переменным. Осталось определить постоянную T_0 . При уменьшении жесткости балки на изгиб продольная сила T_0 должна стремиться к величине (61). Угол поворота должен стремиться к величине (58).

Для определения T_0 служит условие (64). Вычисление входящих в него интегралов дает

$$J_1 \equiv \int_0^{l/2} \psi^2 ds = \frac{p^2 l^3}{4T_0^2} \left[\frac{1}{6} - \frac{3 \text{ch } z}{4z \text{sh } z} - \frac{1}{4 \text{sh}^2 z} + \frac{1}{z^2} \right],$$

$$J_2 \equiv \int_0^{l/2} \psi' ds = \frac{p^2 l}{4T_0^2} \left[\frac{z^2}{\text{sh}^2 z} + \frac{z \text{ch } z}{\text{sh } z} - 2 \right], \quad z \equiv \frac{\lambda l}{2}.$$

Используя значения этих интегралов и проводя небольшие преобразования, уравнение (64) переписываем в следующей форме

$$qz^2 = \frac{945}{z^4} \left[\frac{1}{6} - \frac{3 \text{ch } z}{4z \text{sh } z} - \frac{1}{4 \text{sh}^2 z} + \frac{1}{z^2} + h_*^2 \left(\frac{z^2}{\text{sh}^2 z} + \frac{z \text{ch } z}{\text{sh } z} - 2 \right) \right], \quad (71)$$

$$q \equiv 420 \left(\frac{E}{p_0} \right)^2 \left(\frac{h}{l} \right)^8, \quad h_*^2 \equiv \frac{C_2}{Al^2}, \quad z \equiv \frac{\lambda l}{2}, \quad \lambda^2 \equiv \frac{T_0}{C_2}, \quad p_0 \equiv \frac{p}{H}.$$

Параметр q в уравнении (71), как легко убедиться, может принимать значения в широком интервале: например, $[10^{-3}, 10^3]$. В представленном виде правая часть уравнения (71) есть монотонно убывающая функция z , не имеет особенности в нуле, а ее значение в нуле примерно равно единице.

Рассмотрим предельные случаи уравнения (71). Переход к струне происходит при больших значениях переменной x . В этом случае уравнение (71) принимает вид

$$\frac{q}{945} z^6 = \frac{1}{6} \Rightarrow T_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{Ap^2l^2}.$$

Получили результат, который для струны уже был представлен формулой (61). Переход к балке осуществляется при малых значениях переменной x . Разлагая правую часть уравнения в ряд по x , получаем

$$qz^2 = 1 - \frac{z^2}{5} + \frac{z^4}{33} + 2h_*^2 \left(21 - 4z^2 + \frac{3z^4}{5} \right).$$

Для не слишком длинной балки это уравнение принимает совсем простой вид

$$qz^2 = 1 + 42h_*^2 \Rightarrow T_0 = \frac{4C_2}{l^2} \left(1 + \frac{7h^2}{2l^2} \right) \frac{1}{420} \left(\frac{p_0}{E} \right)^2 \left(\frac{l}{h} \right)^8.$$

Вычислим приближенное значение нормального прогиба по формуле

$$w' = \psi \Rightarrow w = \frac{pl}{2T_0} \left(\frac{l}{4} - \frac{l \operatorname{ch} z}{2z \operatorname{sh} z} - \frac{s^2}{l} + \frac{\operatorname{ch} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} z} \right).$$

Максимального значения прогиб достигает при $s = 0$

$$w(0) = \frac{pl^2}{4T_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z \operatorname{sh} z} \right).$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням z и сохраняя два главных члена, получаем

$$w(0) = W_0 \left[1 - \frac{1 + 7h^2/3l^2}{4200} \left(\frac{p_0}{E} \right)^2 \left(\frac{l}{h} \right)^8 \right], \quad W_0 \equiv \frac{pl^4}{16 \cdot 24C_2},$$

где W_0 есть значение прогиба, найденного по линейной теории.

Это выражение позволяет оценить возможность применения линейной теории. Для сравнительно коротких балок, линейная теория безусловно применима. Но для длинных балок, например при $l = 100h$, она становится сомнительной.

9 Изгиб прямолинейного стержня мертвым моментом

В качестве простой иллюстрации рассмотрим одну из немногих задач, допускающих точное элементарное решение по нелинейной теории. Примем, что в уравнениях (11)–(12) внешние силы и моменты, а также инерционные члены, отсутствуют $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Тогда имеем

$$\mathbf{N}'(s, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (72)$$

Краевые условия имеют вид

$$s = 0: \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l: \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} \equiv \mathbf{L} \mathbf{m}, \quad (73)$$

где $\mathbf{L} = \text{const}$ и не зависит от деформации.

Решения уравнений статики (72) с учетом условий (73) имеют вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} = \mathbf{L} \mathbf{m}. \quad (74)$$

Соотношения упругости для первоначально прямолинейных, но естественно закрученных, стержней определены формулами

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \varphi' V_0 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi} + \varphi' V_0 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t},$$

где φ' — естественная крутка стержня, которая ниже предполагается постоянной: $\varphi = 2\pi s/l$, l — длина, на которой поперечное сечение стержня поворачивается на угол 2π .

Первое из этих соотношений с учетом (74) влечет

$$\boldsymbol{\varepsilon} = - \left(\frac{\varphi' B_0}{A_3} \right) (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{R}' = \left(1 - \frac{\varphi' B_0}{A_3} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \right) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \quad (75)$$

Соотношения упругости для момента с учетом (74) и (75) переписываются в следующем виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot [C_t \mathbf{t} \mathbf{t} + C_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2] \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad C_t \equiv C_3 \left(1 - \frac{\varphi'^2 B_0^2}{C_3 A_3} \right). \quad (76)$$

В принципе несложно построить решение задачи при произвольных значениях жесткостей стержня на изгиб, ибо она соответствует хорошо изученному случаю Эйлера в динамике твердого тела. Но, чтобы не загромождать решение чисто техническими деталями, ограничимся случаем, когда $C_1 = C_2$. Уравнение (76) перепишем в обращенной форме и добавим к нему уравнение Пуассона (14). Тогда получим систему

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{P} \cdot [C_t^{-1} \mathbf{t} \mathbf{t} + C_1^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{t} \mathbf{t})] \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \quad (77)$$

Для системы (77) легко строится первый интеграл, который называется интегралом энергии и имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot [C_t^{-1} \mathbf{t} \mathbf{t} + C_1^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{t} \mathbf{t})] \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L} = \text{const}. \quad (78)$$

Интеграл энергии (78) налагает ограничение на вид тензора поворота \mathbf{P} . Общий вид тензора поворота, удовлетворяющего интегралу энергии (78), дается представлением

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{t}), \quad (79)$$

где использовано стандартное обозначение

$$\mathbf{Q}(\gamma \mathbf{p}) \equiv (1 - \cos \gamma) \mathbf{p} \mathbf{p} + \cos \gamma \mathbf{E} + \sin \gamma \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

для поворота на угол γ вокруг единичного вектора \mathbf{p} .

Если $C_1 \neq C_2$, то представление (79) неприменимо. При любых значениях углов $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ энергия (78) остается постоянной. Используя представление (79), систему (77) переписываем в виде

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot [C_t^{-1} \mathbf{t} \mathbf{t} + C_1^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{t} \mathbf{t})] \cdot \mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot (\alpha' \mathbf{m} + \beta' \mathbf{t}).$$

Исключая отсюда тензор поворота $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m})$, получаем совсем простую систему

$$\alpha'(s) \mathbf{m} + \beta'(s) \mathbf{t} = \mathbf{L} [C_t^{-1} \mathbf{t} \mathbf{t} + C_1^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{t} \mathbf{t})] \cdot \mathbf{m} = \mathbf{L} [(C_t^{-1} - C_1^{-1}) \cos \sigma \mathbf{t} + C_1^{-1} \mathbf{m}],$$

решение которой дается формулами

$$\alpha'(s) = \mathbf{L} C_1^{-1}, \quad \beta'(s) = \mathbf{L} (C_t^{-1} - C_1^{-1}) \cos \sigma, \quad \cos \sigma \equiv \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}. \quad (80)$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая краевое условие для тензора поворота, находим

$$\alpha(s) = \mathbf{L} C_1^{-1} s, \quad \beta(s) = \mathbf{L} \cos \sigma (C_t^{-1} - C_1^{-1}) s$$

Чтобы найти форму изогнутого стержня, необходимо проинтегрировать второе из равенств (75), но предварительно надо вычислить величину

$$\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \frac{L \cos \sigma}{C_t}. \quad (81)$$

Чтобы понять смысл этой величины, нужно вспомнить формулу

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} + \Phi = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot (\varphi' \mathbf{t} + \alpha' \mathbf{m} + \beta' \mathbf{t}).$$

Кручение деформированного стержня определяется по формуле

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \varphi' + \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}.$$

Таким образом величина (81) определяет изменение кручения стержня в процессе деформации. Вычислим остальные характеристики деформированного стержня. В данной задаче деформации поперечного сдвига отсутствуют. Относительное удлинение стержня находится по формуле (75)

$$\varepsilon = \mathcal{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = -\frac{\varphi' B_0}{A_3} \frac{L \cos \sigma}{C_t}. \quad (82)$$

Отсюда видим, что при отсутствии естественной крутки ($\varphi' = 0$) длина стержня при деформации не меняется. Если $\varphi' \neq 0$, то при $L > 0$ стержень укорачивается, а при $L < 0$ — удлиняется. Для определения кривизны и кручения несущей кривой нужно вычислить ее естественный трехгранник

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{m} / \sin \sigma, \quad \bar{\mathbf{b}} = [\bar{\mathbf{t}} \cos \sigma - \mathbf{m}] / \sin \sigma.$$

Отсюда прямым вычислением находится вектор Дарбу, кривизна и кручение несущей кривой

$$\bar{\tau} = \alpha' \cos \sigma \bar{\mathbf{t}} - \alpha' \sin \sigma \bar{\mathbf{b}} = \alpha' \mathbf{m} \Rightarrow \bar{\mathbf{R}}_c^{-1} = \alpha' \sin \sigma, \quad \bar{\mathbf{R}}_t^{-1} = \alpha' \cos \sigma.$$

Интегрируя уравнение (75), находим уравнение деформированной несущей кривой

$$\mathbf{R} = (1 + \varepsilon) \left[s \cos \sigma \mathbf{m} + \frac{C_1}{L} \mathbf{Q} \left(\frac{Ls}{C_1} \mathbf{m} \right) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{m}) - \frac{C_1}{L} (\mathbf{t} \times \mathbf{m}) \right].$$

Вектор, стоящий в квадратных скобках этого выражения, описывает спираль, навитую на цилиндр радиуса $a = C_1 \sin \sigma / |L|$. Ось цилиндра натянута на вектор \mathbf{m} и проходит через точку, определяемую вектором $(1 + \varepsilon) C_1 (\pi \cos \sigma \mathbf{m} - 2\mathbf{t} \times \mathbf{m}) / L$. Длина одного витка спирали равна $2\pi C_1 / |L|$. Шаг спирали h равен $l \cos \sigma$.

10 Эластика Эйлера

Обратимся к рассмотрению одной из самых знаменитых задач механики, известной под названием эластики Эйлера (1744 г.). Этой задачей было положено начало новым разделам механики (теория устойчивости упругих конструкций) и математической

физики (теория ветвлений решений нелинейных уравнений [8]). Решения многих нелинейных задач статики для тонких стержней можно найти в книге [9].

Эластикой Эйлера называют задачу о нагружении первоначально прямолинейного стержня продольной силой, приложенной к свободному торцу стержня. При этом используется модель нерастяжимого стержня. Для определенности будем рассматривать стержень, у которого жесткости на изгиб одинаковы $C_1 = C_2$. Математически задача сводится к интегрированию уравнений статики

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (83)$$

Соотношения упругости принимаем в форме (??)

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \Phi = (C_3 - C_1)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} + C_1 \Phi, \quad (84)$$

причем вектор упругого усилия \mathbf{N} определяется по уравнениям статики.

К уравнениям (83) и (84) следует присоединить краевые условия

$$s = 0: \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l: \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (85)$$

Положительные значения N в (85) отвечают сжимающей силе, действующей на прямолинейный стержень. Для сильно изогнутого стержня первоначально сжимающая сила может стать растягивающей.

Следует помнить и выражения для векторов деформации (14) и (??)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \Phi \times \mathbf{P}, \quad |\mathbf{R}'| = 1.$$

Краевая задача (83) – (85) всегда имеет очевидное решение

$$\mathbf{R}(s) = s \mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (86)$$

которое отвечает прямолинейной форме равновесия сжатого стержня.

Ниже будет показано, что при достаточно малых значениях сжимающего усилия N равновесная конфигурация (86) является единственной. При превышении усилием N некоего критического значения, называемого эйлеровой критической силой, появляются дополнительные равновесные конфигурации, в которых стержень изогнут. Чтобы найти эти равновесные конфигурации, сначала нужно выяснить к какому классу кривых принадлежат изогнутые равновесные конфигурации. Оказывается, что в эластике Эйлера существуют только равновесные конфигурации, описываемые плоскими кривыми. Доказательство этого факта начнем с очевидного равенства

$$\mathbf{R}'' = \Phi \times \mathbf{R}' \Rightarrow \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \Phi - (\Phi \cdot \mathbf{R}') \mathbf{R}' \Rightarrow \Phi \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Используя последнее равенство и второе из соотношений (84), получаем

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Умножая второе из уравнений статики (83) скалярно на \mathbf{R}' , получаем интеграл

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{R}' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' - \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' = 0 \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = \text{const.}$$

Согласно краевым условиям имеем

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \cdot \mathbf{R}' = 0.$$

Первое уравнение статики и краевые условия показывают, что $\mathbf{N} = -N \mathbf{t}$. Умножая второе из уравнений статики (83) скалярно на \mathbf{N} , получаем еще один интеграл

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{N})' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = -N \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (87)$$

Окончательное выражение для момента имеет вид

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = C_1 R_c^{-1} \bar{\mathbf{t}} \times \bar{\mathbf{n}} = C_1 R_c^{-1} \bar{\mathbf{b}}, \quad (88)$$

где R_c , $\bar{\mathbf{t}}$, $\bar{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ суть радиус кривизны, касательная, нормаль и бинормаль упругой линии в деформированном состоянии соответственно.

Поскольку построение прямолинейной равновесной конфигурации не вызывает никаких затруднений, то дальше будем рассматривать только изогнутые формы равновесия $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$. Интеграл (87) дает равенство

$$(\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') \cdot \mathbf{t} = -R_c^{-1} (\bar{\mathbf{t}} \times \bar{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{t} = -R_c^{-1} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

которое показывает, что векторы \mathbf{R}'' , \mathbf{R}' и \mathbf{t} лежат в одной плоскости.

Поэтому вектор \mathbf{R}'' можно представить в виде разложения

$$\mathbf{R}'' = \mu \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R}' = \mu [\mathbf{t} - (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{t}) \mathbf{R}'], \quad \mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}'' = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Используя это разложение, для бинормали получаем следующее представление

$$\bar{\mathbf{b}} = -R_c (\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') = -R_c \mu (\mathbf{R}' \times \mathbf{t}).$$

Дифференцируя это выражение и исключая из получившегося соотношения вектор \mathbf{R}'' , получаем

$$\bar{\mathbf{b}}' = -[(R_c \mu)' - R_c \mu^2 (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{t})] (\mathbf{R}' \times \mathbf{t}).$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на вектор $\bar{\mathbf{b}}$ и учитывая ортогональность векторов $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{b}}'$, получаем, что выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю. Это означает, что вектор бинормали имеет не только постоянный модуль (равный единице), но и постоянен по направлению. В дальнейшем тильду у бинормали будем опускать, т.е. $\bar{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{b}$.

Таким образом, для второго вектора деформации получили выражение

$$\Phi = \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = -R_c^{-1} \mathbf{b} \equiv \psi'(s) \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \equiv \bar{\mathbf{b}}, \quad \psi'(s) \equiv -R_c^{-1}(s). \quad (89)$$

Зная вектор Φ нетрудно найти тензор поворота [10]. Он имеет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \cos \psi(s) \mathbf{t} + \sin \psi(s) \mathbf{b}. \quad (90)$$

Итак, выражения для векторов усилий и моментов в эластике Эйлера по необходимости имеют вид

$$\mathbf{N} = -N \mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \Phi = C_1 \psi'(s) \mathbf{b}. \quad (91)$$

Краевая задача (83) – (85) теперь сводится к скалярной нелинейной задаче для определения угла поворота $\psi(s)$

$$C_1\psi'' + N \sin \psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \quad (92)$$

Получили однородную нелинейную краевую задачу для угла поворота $\psi(s)$. При любых значениях внешней силы N она имеет нулевое решение $\psi = 0$, которое отвечает прямолинейной форме равновесия стержня. Однако при определенных условиях, налагаемых на внешнюю силу, однородная краевая задача (92) может иметь ненулевое решение.

Без труда находится первый интеграл в задаче (92)

$$\psi'^2 = \frac{2N}{C_2} (\cos \psi(s) - \cos \psi(l)). \quad (93)$$

Из уравнения (93) следует, что при $N < 0$, т.е. при приложении к стержню растягивающей силы, оно имеет только нулевое решение $\psi = 0$, т.е. стержень остается прямолинейным. При положительных N уравнение (93) может иметь ненулевое решение, а может и не иметь его. В уравнении (93) сделаем замену искомой переменной. Сначала перейдем к половинному углу

$$\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right)$$

и перепишем уравнение (93) в следующем виде

$$\psi'^2 = \frac{4N}{C_2} \left[\sin^2 \left(\frac{\psi(l)}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\psi(s)}{2} \right) \right]. \quad (94)$$

Введем новую переменную ϑ

$$\sin \vartheta = \frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\psi_l/2)}, \quad 0 \leq \vartheta(s) \leq \pi/2, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta(l) = \pi/2.$$

Здесь мы ограничиваемся построением только тех решений, которые удовлетворяют условию $0 \leq \psi(s) \leq \pi$. Дифференцируя последнее равенство по s и возводя получившееся равенство в квадрат, приходим к уравнению

$$\vartheta'^2 = \frac{N}{C_2} [1 - \sin^2 \beta \sin^2 \vartheta] \Rightarrow \vartheta' = \sqrt{\frac{N}{C_2}} \sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \vartheta}, \quad (95)$$

где $\beta \equiv \psi(l)/2$ и учтено, что $\vartheta' > 0$.

Следует обратить внимание, что уравнение (95) эквивалентно уравнению (94) только в том случае, когда функция $\psi(s)$ не равна тождественно нулю. Для прямолинейной формы равновесия уравнение (95) теряет смысл. Кроме того, следует обратить внимание, что ϑ' , в отличие от ψ' , не обращается в нуль на свободном торце стержня.

Интегрируя уравнение (95), получаем равенство

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}} s = \int_0^{\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \tau}}, \quad (96)$$

которое определяет s как функцию переменной ϑ и параметра $\psi(l)$. Прежде всего необходимо найти параметр β . Для этого нужно использовать условие $\vartheta(l) = \pi/2$. При этом уравнение (96) принимает вид

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}} l = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \tau}} \equiv J(\beta). \quad (97)$$

Правая часть уравнения (97) есть монотонно возрастающая функция параметра β , в чем можно убедиться вычислив производную от нее по β

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = \frac{\sin 2\beta}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\tau d\tau}{\sqrt{(1 - \sin^2 \beta \sin^2 \tau)^3}} > 0, \quad 0 < 2\beta < \pi.$$

Наименьшее значение функция $J(\beta)$ принимает в нуле, где она равна $J(0) = \pi/2$. При β стремящемся к $\pi/2$ интеграл $J(\beta)$ стремится к бесконечности. Если левая часть (97) меньше $\pi/2$, то уравнение (97) не имеет решения. При выполнении неравенства

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}} l \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow N \geq \frac{\pi^2 C_2}{4l^2} \quad (98)$$

решение уравнения (97) существует и единственно. Значение N , при котором в неравенстве (98) достигается знак равенства, называется эйлеровой критической силой N_{cr}

$$N_{cr} \equiv \frac{\pi^2 C_2}{4l^2}. \quad (99)$$

При этом из (97) следует, что $\beta \equiv \psi(l)/2 = 0$. Отсюда в свою очередь следует, что $\psi(s) = 0$, т.е. стержень имеет только прямолинейную форму равновесия. При $N > N_{cr}$ уравнение (97) имеет ненулевое решение.

Легко найти решение уравнения (97) при малых $\sin^2 \beta$. Для этого достаточно разложить подинтегральное выражение в (97) в ряд по степеням параметра $\sin^2 \beta$ и ограничиться только первыми двумя членами разложения.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \tau}} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \sin^2 \tau.$$

Подставляя это разложение в (97), получаем

$$\sin^2 \beta = 4 \left(\sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1 \right), \quad N \geq N_{cr}. \quad (100)$$

Аналогично вычисляем правую часть равенства (96)

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \tau}} = \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \beta \right) \vartheta - \frac{1}{8} \sin^2 \beta \sin 2\vartheta.$$

Принимая во внимание это равенство, а также (97), уравнение (96) переписываем в виде

$$\frac{\pi s}{2l} = \vartheta - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{N_{cr}}{N}} \right) \sin 2\vartheta, \quad N \geq N_{cr}.$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений и ограничиваясь вторым приближением, получаем

$$\vartheta = \frac{\pi s}{2l} + \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\pi s}{l}, \quad \gamma \equiv 1 - \sqrt{\frac{N_{cr}}{N}}. \quad (101)$$

Видим, что величина ϑ слабо зависит от N , если, конечно, N незначительно превышает N_{cr} . Возвращаясь к исходной переменной ψ и учитывая ее малость, получаем в первом приближении следующее выражение

$$\psi(s) = \psi_l \sin \vartheta = 4 \left(\sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1 \right)^{1/2} \sin \left[\frac{\pi s}{2l} + \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\pi s}{l} \right]. \quad (102)$$

Располагая углом поворота нетрудно вычислить все остальные неизвестные в данной задаче.

Подведем итоги. Если к торцу стержня приложена продольная растягивающая сила, то стержень имеет только одну прямолинейную равновесную конфигурацию. Ситуация меняется, если на стержень действует сжимающая сила. В этом случае всегда существует прямолинейная равновесная конфигурация, которая определяется следующими выражениями

$$\mathbf{R}(s) = (1 - N/A) st, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = -Nt, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (103)$$

В выражениях (103) учтена деформация растяжения, являющаяся малой величиной.

Если модуль сжимающей силы N превышает значение эйлеровой критической силы N_{cr} , определяемой формулой (99), то в эластике Эйлера появляется еще одно решение, представленное формулой (102). Интуитивно ясно, что в действительности при $N > N_{cr}$ реализуется именно второе решение, а первое решение будет неустойчиво. Последнее утверждение нетрудно доказать теоретически, если рассмотреть малые движения относительно прямолинейной равновесной конфигурации. Здесь мы этого делать не будем, но в следующем пункте процедура наложения малых движений на равновесные конфигурации будет описана на примере модельной задачи.

В литературе [8] при суждении об устойчивости равновесной конфигурации часто используют энергетические соображения. А именно, из двух равновесных конфигураций устойчивой считается та, которая имеет меньшую энергию. Строго говоря, сравнение энергий равновесных конфигураций не имеют прямого отношения к понятию устойчивости. Равновесная конфигурация консервативной системы устойчива, если для нее потенциальная энергия имеет изолированный локальный минимум, который никак не связан с энергией другой равновесной конфигурации. Тем не менее, из двух возможных равновесных конфигураций Природа, если это возможно, выбирает конфигурацию с меньшей энергией. Поэтому в эластике Эйлера считается устойчивой

именно изогнутая конфигурация, поскольку потенциальная энергия в этом случае меньше [8]. Тем не менее, подобное рассуждение в эластике Эйлера наталкивается на возражение. Дело в том, что в рассматриваемом случае минимум энергии не изолирован. Фактически мы имеем семейство равновесных изогнутых конфигураций, и все они обладают одинаковой энергией. Действительно, полученное решение позволяет однозначно найти угол поворота ψ вокруг вектора бинормали \mathbf{b} , но сам вектор \mathbf{b} был определен с точностью до произвольного поворота вокруг \mathbf{t}

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}(\varphi(\mathbf{t})\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b}_0,$$

где \mathbf{b}_0 есть произвольный фиксированный вектор, ортогональный \mathbf{t} ; $\varphi(\mathbf{t})$ — произвольный угол поворота вокруг \mathbf{t} .

С такой же степенью неопределенности установлены и все искомые величины, определяемые формулами (89) и (90)

$$\Phi = \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \psi'(s)\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b}_0.$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{b}_0) \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{t}) \Rightarrow \mathbf{R}' = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot [\cos\psi(s)\mathbf{t} + \sin\psi(s)\mathbf{b}_0].$$

Если допустить, что угловой параметр φ зависит от времени, то можно вычислить угловую скорость [10]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot [(1 - \cos\psi)\mathbf{t} - \sin\psi\mathbf{b}_0 \times \mathbf{t}] = \dot{\varphi} [(1 - \cos\psi)\mathbf{t} - \sin\psi\mathbf{b} \times \mathbf{t}].$$

Таким образом, если в эластике Эйлера мы сообщим изогнутому стержню сколь угодно малую угловую скорость, то он будет медленно вращаться (прецессировать) вокруг вектора \mathbf{t} , пробегая все множество равновесных конфигураций. Причем для этого не требуется приложения внешних моментов. Следует подчеркнуть, что речь не идет о вращениях стержня как жесткого целого. Например, заделанный торец стержня не поворачивается, ибо при $s = 0$ тензор поворота становится единичным тензором при любом значении φ . Речь идет о том, что стержень не сопротивляется неким специальным видам деформации, что для реальных стержней не соответствует действительности. Следовательно, указанный факт нужно отнести к некоему дефекту самой теории стержней, который до сих пор не устранен ни в одной из существующих версий теории стержней. Отметим, что от указанного дефекта невозможно избавиться никакими манипуляциями с внутренней энергией стержня. Конечно, можно в этой связи говорить о трении и тому подобных вещах и спрятать проблему. Но проблема существует, и ее необходимо разрешить. В частности, отмеченная особенность проявляется в так называемом парадоксе Николаи [2], который заключается в том, что равновесная конфигурация стержня, скрученного сколь угодно малым моментом оказывается неустойчивой относительно бесконечно малых возмущений. Обычно [2] парадокс Николаи объясняют неконсервативностью задачи о кручении стержня. Однако это объяснение неудовлетворительно, ибо легко показать, что парадокс Николаи существует и в задаче о скручивании стержня потенциальным (консервативным) моментом.

Может показаться, что все рассуждения, связанные с вращением стержня, не вполне корректны, ибо рассматривались статические уравнения. Ниже мы рассмотрим эластику Эйлера в динамической постановке.

11 Стационарные вращения в эластике Эйлера

Запишем уравнения движения, исключив из них вектор \mathbf{R}

$$\mathbf{N}'' = \rho F \ddot{\mathbf{R}}', \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \quad (104)$$

Здесь использовано представление для момента, полученное в предыдущем пункте. Краевые условия принимаем в форме (85)

$$s = 0 : \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N}' = \mathbf{0}; \quad s = l : \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (105)$$

Решение задачи (104)–(105) ищем в следующем виде

$$\mathbf{P}(s, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}[\varphi(\mathbf{t})\mathbf{t}] \cdot \mathbf{Q}[\psi(s)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}^T[\varphi(\mathbf{t})\mathbf{t}], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (106)$$

где \mathbf{e} — постоянный единичный вектор.

Из представления (106) видим, что при $s = 0$ и $\psi(0) = 0$ тензор поворота обращается в единичный тензор, т.е. поворот заделанного торца стержня отсутствует. Вектор изгиба-кручения, отвечающий тензору поворота (106), имеет вид

$$\Phi = \psi'(s)\mathbf{Q}[\varphi(\mathbf{t})\mathbf{t}] \cdot \mathbf{e} = \psi'(s)\mathbf{e}_*, \quad \mathbf{e}_*(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{Q}[\varphi(\mathbf{t})\mathbf{t}] \cdot \mathbf{e} \quad (107)$$

Для касательной в актуальном положении имеем выражение

$$\mathbf{R}' = \cos \psi(s) \mathbf{t} + \sin \psi(s) \mathbf{e}_*(\mathbf{t}) \times \mathbf{t}.$$

Отсюда имеем

$$\ddot{\mathbf{R}}' = \sin \psi(s) (\ddot{\varphi} \mathbf{e}_*(\mathbf{t}) - \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_*(\mathbf{t}) \times \mathbf{t}).$$

Вектор усилия \mathbf{N} представим в виде разложения

$$\mathbf{N} = -N\mathbf{t} + Q_* \mathbf{e}_* + Q \mathbf{e}_* \times \mathbf{t}, \quad Q'_*(0, \mathbf{t}) = Q'(0, \mathbf{t}) = 0, \quad Q_*(l, \mathbf{t}) = Q(l, \mathbf{t}) = 0.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (104) и проецируя получившееся уравнение на оси \mathbf{t} , \mathbf{e}_* и $\mathbf{e}_* \times \mathbf{t}$, получаем

$$Q'' = -\rho F \dot{\varphi}^2 \sin \psi, \quad Q_*'' = \rho F \ddot{\varphi} \sin \psi. \quad (108)$$

При получении последнего равенства были использованы краевые условия. Для вектора момента имеем выражение

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = C_1 \psi' \mathbf{e}_*.$$

Второе уравнение системы (104) эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$C_1 \psi'' + N \sin \psi + Q \cos \psi - Q_* \sin \psi = 0, \quad Q_* = 0. \quad (109)$$

Последнее уравнение в (109) и второе уравнение системы (108) показывают, что в эластике Эйлера возможны только стационарные вращения

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} \equiv \omega = \text{const}. \quad (110)$$

Окончательно пришли к следующей системе уравнений

$$Q'' = -\rho F \omega^2 \sin \psi, \quad C_1 \psi'' + N \sin \psi + Q \cos \psi = 0. \quad (111)$$

К системе (111) необходимо присоединить краевые условия

$$s = 0: Q'(0) = 0, \quad \psi(0) = 0; \quad s = l: Q(l) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \quad (112)$$

Нелинейная краевая задача четвертого порядка (111)–(112) достаточно сложна для точного анализа, поскольку допускает только один первый интеграл. Но для наших целей нет нужды строить точное решение. Мы видели, что в эластике Эйлера наряду с равновесными конфигурациями имеются вращающиеся “равновесные” конфигурации, причем скорость вращения осталась неопределенной. Здесь нам нужно показать, что учет сил инерции не уничтожает наличие вращающихся “равновесных” конфигураций, хотя и вносит некоторые уточнения. Прежде всего, выше мы установили, что вращения могут происходить только с постоянной угловой скоростью. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая малых скоростей вращения, поскольку в этом случае задачу можно линеаризовать. При малых ω^2 поперечная сила Q мала. Отклонение упругой линии от вертикали, т.е. угол нутации ψ , также незначительно меняется. Поэтому будем искать возмущенный угол нутации в виде разложения

$$\psi(s) = \psi_{st}(s) + \vartheta(s), \quad |\vartheta(s)| \ll 1,$$

где $\psi_{st}(s)$ есть ненулевое решение статической задачи при $N > N_{cr}$.

Подставляя это разложение в (111) – (112) и ограничиваясь членами первого порядка по ω^2 , получаем следующую краевую задачу

$$Q'' = -\rho F \omega^2 \sin \psi_{st}, \quad C_1 \vartheta'' + (N \cos \psi_{st}) \vartheta = Q \cos \psi_{st}; \quad (113)$$

$$s = 0: Q'(0) = 0, \quad \vartheta(0) = 0; \quad s = l: Q(l) = 0, \quad \vartheta'(l) = 0. \quad (114)$$

Нетрудно доказать, что задача (113) – (114) имеет единственное решение, норма которого мала, если мала величина ω^2 .

Таким образом, учет сил инерции не меняет вывода о наличии вращающихся “равновесных” конфигураций. Это означает, что изогнутые равновесные конфигурации в эластике Эйлера неустойчивы, ибо повернутая изогнутая конфигурация уже не является сколь угодно близкой к неповернутой конфигурации при сколь угодно малых возмущениях.

Следует подчеркнуть, что эксперимент не подтверждает вывода о наличии вращающихся “равновесных” конфигураций. Грубый эксперимент, проведенный автором, показал, что если изогнутую равновесную конфигурацию слегка толкнуть, то начинаются низкочастотные колебания относительно равновесной конфигурации, но не вращения. Это означает, что *используемая нами модель стержня неверно описывает реальную ситуацию*. Между тем, именно эта модель стержня широко используется при анализе многих проблем устойчивости, например, при анализе устойчивости положения равновесия скрученного стержня (парадокс Николаи). В последнем случае потерю устойчивости скрученного сколь угодно малым моментом стержня объясняют неконсервативностью задачи. По мнению автора, это “объяснение” ничего не объясняет, ибо ничего не меняется даже в том случае, когда кручение стержня производится

потенциальным моментом, т.е. задача является консервативной. Кроме того, эксперимент также не подтверждает существование парадокса Николаи. Поэтому надо искать другие причины. В частности, необходимо внимательно проанализировать все допущения, сделанные нами при выводе теории стержней и при переходе к модели, описываемой уравнениями (104).

Среди общих допущений теории стержней главным является задание внутренней энергии в виде квадратичной формы (27). Можно показать, что при любом задании внутренней энергии для стержня с трансверсально изотропной энергией парадокс Николаи не исчезает. Не исчезают и стационарные вращения в эластике Эйлера, которые, по существу, и являются причиной возникновения парадокса Николаи. Иными словами, не в этом лежит корень зла.

При переходе от общей теории стержней к модели нерастяжимого стержня (104) были сделаны три допущения. Первое: пренебрегалось деформацией поперечного сдвига. Второе: отбрасывались деформации растяжения. И, наконец, третье допущение состояло в игнорировании инерции вращения. Интуитивно ясно, а во многих случаях и может быть доказано, что первые два допущения вполне оправданы. Более того, отказ от этих допущений не избавляет ни от парадокса Николаи, ни от возникновения стационарных вращений. Остается третье допущение. Оно принимается во всех работах по теории стержней. При плоских движениях учет инерции вращения оказывается важным только при анализе высокочастотных сдвиговых колебаниях. В нашем случае речь идет о медленных движениях, в которых, казалось бы, учет инерции вращения совершенно не важен. С другой стороны, при рассмотрении стационарных вращений в эластике Эйлера речь шла о пространственных движениях, которые исследованы очень мало. Поэтому именно это обстоятельство и требует отдельного рассмотрения. К сожалению, в общем случае исследовать столь сложные уравнения весьма затруднительно. Однако нетрудно убедиться, что при учете инерции вращения решение вида (106) оказывается невозможным.

12 Динамика скрученного стержня. Парадокс Николаи

12.1 Вводные замечания

Тонкие стержни часто выступают в роли элементов тех или иных конструкций. Например, в ультрацентрифугах, работающих в диапазоне 150 – 400 тысяч оборотов в минуту, ротор устанавливается на гибком стержне и приходится рассматривать совместную динамику ротора (твердого тела) и тонкого стержня. Это очень трудная для анализа проблема. Ситуация заметно упрощается, если стержень считать безынерционным. Вообще, исследование динамики и устойчивости вращающихся валов относится к числу важнейших технических проблем, некоторые из которых обсуждаются в книге [2].

12.2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую динамическую задачу для нерастяжимого гибкого стержня. Выпишем уравнения движения (11), (12)

$$\mathbf{N}'_{\gamma}(s, t) = \rho F \ddot{\mathbf{R}}'_{\gamma}, \quad \mathbf{M}'_{\gamma} + \mathbf{R}'_{\gamma} \times \mathbf{N}_{\gamma} = \rho_0 (\Theta_2 \cdot \boldsymbol{\omega})'. \quad (115)$$

В уравнениях (115) индекс γ поставлен просто для удобства. Скоро мы от него избавимся.

Стержень считаем нерастяжимым, т.е. сохраняем условия

$$\mathbf{R}'_{\gamma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_{\gamma} = C_3 (\Phi_{\gamma} \cdot \mathbf{R}'_{\gamma}) \mathbf{R}'_{\gamma} + C_1 \mathbf{R}'_{\gamma} \times \mathbf{R}''_{\gamma}, \quad (116)$$

где C_1 и C_3 суть жесткости стержня на изгиб и кручение соответственно.

Тензор инерции считаем трансверсально изотропным

$$\rho_0 \Theta_2 = \Theta_1 \mathbf{E} + (\Theta_3 - \Theta_1) \mathbf{R}'_{\gamma} \otimes \mathbf{R}'_{\gamma}.$$

Считаем, что основание стержня заделано, а свободный конец нагружен следящим моментом. В этом случае краевые условия имеют вид

$$s = 0: \mathbf{R}_{\gamma} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l: \mathbf{N}_{\gamma} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{\gamma} = L \mathbf{R}'_{\gamma}. \quad (117)$$

Начальные условия обсудим позднее.

12.3 Решение статической задачи

Начнем с решения статической задачи. В этом случае уравнения (115) – (117) интегрируются элементарно и дают решение

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = L \mathbf{R}' = L \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{R} = s \mathbf{t}, \quad \Phi = (L/C_3) \mathbf{t}. \quad (118)$$

Осталось найти тензор поворота

$$\mathbf{P}' = \Phi \times \mathbf{P} = (L/C_3) \mathbf{t} \times \mathbf{P}.$$

Отсюда немедленно следует выражение для тензора поворота

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \beta) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \cos \beta \mathbf{E} + \sin \beta \mathbf{t} \times \mathbf{E}, \quad \beta \equiv L s / C_3. \quad (119)$$

Построенная равновесная конфигурация является единственной.

12.4 Малые колебания скрученного стержня

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ стержень был незначительно изогнут, так что угол между касательной к деформированной упругой линии является малым. При $t > 0$ движение стержня описывается уравнениями (115) и краевыми условиями (117). По крайней мере при малых временах ось стержня будет оставаться близкой к

прямолинейной форме. Исследуем эти малые движения. Тензор поворота будем искать через углы Эйлера [10]

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}[\psi(s, t)\mathbf{t}] \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s, t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}[\varphi(s, t)\mathbf{t}], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (120)$$

где ψ , ϑ , φ суть углы прецессии, нутации и собственного вращения соответственно; единичный вектор \mathbf{e} может иметь любое направление, ортогональное \mathbf{t} .

Легко установить смысл угла нутации ϑ . Для этого достаточно вычислить скалярное произведение

$$\mathbf{R}'_{\gamma} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s, t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{t} = \cos \vartheta(s, t).$$

По предположению этот угол мал при $t = 0$. Следовательно, он будет оставаться малым, по крайней мере, при малых временах. Чтобы использовать это обстоятельство, перепишем тензор поворота в тождественном виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) \cdot \mathbf{Q}(\beta\mathbf{t}), \quad \beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{e}_* \equiv \mathbf{Q}(\psi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}. \quad (121)$$

Воспользуемся теперь малостью угла ϑ .

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) = \mathbf{E} + \vartheta_{\gamma} \times \mathbf{E}, \quad \vartheta_{\gamma} \equiv \vartheta \mathbf{e}_*.$$

Хотя модуль вектора ϑ_{γ} мал, но он может поворачиваться на произвольный конечный угол прецессии ψ . Ограничиваясь линейными членами по ϑ_{γ} , получаем представления

$$\mathbf{R}'_{\gamma} = \mathbf{t} + \vartheta_{\gamma} \times \mathbf{t}, \quad \Phi_{\gamma} = \vartheta'_{\gamma} + \beta' \mathbf{R}'_{\gamma}, \quad \mathbf{M}_{\gamma} = C_3 \beta' \mathbf{R}'_{\gamma} + C_1 \vartheta'_{\gamma}. \quad (122)$$

При вычислении угловой скорости следует помнить о возможном наличии вращений актуальной конфигурации стержня. Это означает, что углы прецессии ψ и собственного вращения φ имеют следующее строение

$$\psi(s, t) = \gamma(t) + \bar{\psi}(s, t), \quad \varphi(s, t) = -\gamma(t) + \bar{\varphi}(s, t), \quad \beta(s, t) = \bar{\psi}(s, t) + \bar{\varphi}(s, t).$$

Видим, что угол кручения β не зависит от угла поворота γ , но угол прецессии ψ и, следовательно, вектор поворота ϑ_{γ} зависят от γ . При этом следует иметь в виду, что угол γ и производные от него по времени не являются малыми.

Вектор поворота ϑ_{γ} представим в следующем виде

$$\vartheta_{\gamma} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \vartheta, \quad \vartheta = \vartheta(s, t)\bar{\mathbf{e}}, \quad \bar{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{Q}[\bar{\psi}(s, t)\mathbf{t}] \cdot \mathbf{e}. \quad (123)$$

Аналогичным образом преобразуются представления (122)

$$\mathbf{R}'_{\gamma} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{R}', \quad \Phi_{\gamma} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \Phi, \quad \mathbf{M}_{\gamma} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{t} + \vartheta \times \mathbf{t}, \quad \Phi = \vartheta' + \beta' \mathbf{R}', \quad \mathbf{M} = C_3 \beta' \mathbf{R}' + C_1 \vartheta'. \quad (124)$$

Вычислим угловую скорость, отвечающую тензору поворота (122), и другие необходимые для дальнейшего величины

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \left(\dot{\beta} \mathbf{R}' + \dot{\vartheta} + \gamma\mathbf{t} \times \vartheta \right),$$

$$\mathbf{t} \times \ddot{\mathbf{R}}' = \mathbf{Q}(\gamma \mathbf{t}) \cdot \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times (\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right],$$

$$\rho_0 (\boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega})' = \mathbf{Q}(\gamma \mathbf{t}) \cdot \left[\Theta_3 \ddot{\beta} \mathbf{R}' + \Theta_1 \left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma} \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\gamma} \mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta} \right) + \right. \\ \left. + \Theta_3 \dot{\beta} \left(\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t} \right) \right]. \quad (125)$$

Вектор усилия \mathbf{N}_γ представим в следующей форме

$$\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma \mathbf{t}) \cdot \mathbf{N}.$$

Уравнения (115) в линейном приближении принимают вид

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times (\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right],$$

$$C_3 \beta'' \mathbf{R}' + C_1 \boldsymbol{\vartheta}'' + C_3 \beta' \boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} =$$

$$= \Theta_3 \ddot{\beta} \mathbf{R}' + \Theta_1 \left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma} \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\gamma} \mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta} \right) + \Theta_3 \dot{\beta} \left(\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t} \right),$$

где \mathbf{N} и $\boldsymbol{\vartheta}$ ортогональны \mathbf{t} между собой.

Из этих уравнений видим, что задачи кручения и изгиба разделяются. Для задачи кручения получаем волновое уравнение

$$C_3 \beta'' = \Theta_3 \ddot{\beta}, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta'(l) = L/C_3. \quad (126)$$

Для задачи изгиба получаем следующую систему

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times (\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right],$$

$$C_1 \boldsymbol{\vartheta}'' + C_3 \beta' \boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \quad (127)$$

$$= \Theta_1 \left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma} \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\gamma} \mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta} \right) + \Theta_3 \dot{\beta} \left(\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t} \right),$$

К уравнениям (127) необходимо присоединить краевые условия, которые в линейном приближении записываются в следующей форме

$$s = 0: \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0}; \quad s = l: \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta}' = \mathbf{0}. \quad (128)$$

Систему (127) можно немного упростить. В правой части второго уравнения этой системы содержится подчеркнутое слагаемое. Оно существенно только при рассмотрении высокочастотных колебаний, которые без учета деформации поперечного не могут быть правильно описаны, нас эти колебания не интересуют. Это слагаемое должно быть отброшено. Если бы мы все же захотели бы рассмотреть высокочастотные колебания и учли бы деформации растяжения и сдвига, то на акустический спектр подчеркнутые в (127) слагаемые не оказали бы никакого влияния, и их можно было бы отбросить. Они существенны только при описании быстрых движений. Формальный повод для отбрасывания подчеркнутых в (127) слагаемых дает следующее

рассуждение. Если из второго уравнения системы (127) исключить подчеркнутые слагаемые с помощью первого уравнения этой же системы, то в получившемся уравнении появится слагаемое, которое заведомо много меньше слагаемого $\mathbf{t} \times \mathbf{N}$, содержащегося в этом уравнении. Поэтому его можно и даже необходимо отбросить.

Таким образом, вместо системы (127) допустимо рассматривать более простую систему

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' &= \rho F \left[\ddot{\vartheta} - \dot{\gamma}^2 \vartheta + \mathbf{t} \times (\dot{\gamma} \vartheta + 2\dot{\gamma} \dot{\vartheta}) \right], \\ C_1 \vartheta'' + C_3 \beta' \vartheta' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} &= \Theta_3 \dot{\beta} (\dot{\gamma} \vartheta - \mathbf{t} \times \dot{\vartheta}). \end{aligned} \quad (129)$$

Переход к классическим уравнениям, впервые исследованным А. Трешем (1952) и описанным в книге В.В. Болотина [2], происходит при принятии следующих ограничений

$$\gamma = 0, \quad \beta = Ls/C_3, \quad \dot{\beta} = 0. \quad (130)$$

Принятие первого из этих ограничений возможно всегда. Его использование просто затрудняет, как анализ основной системы, так и интерпретацию получаемых результатов. Что касается принятия второго ограничения, то его принятие также возможно, но при этом рассматривается частный случай возмущений, относительно которых исследуется устойчивость. А именно, второе ограничение соответствует следующим начальным условиям для задачи кручения (126)

$$\mathbf{t} = 0: \beta(s, 0) = Ls/C_3, \quad \dot{\beta}(s, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(s, t) = Ls/C_3. \quad (131)$$

Таким образом, классическая система следует из (129) и имеет вид

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \ddot{\vartheta}, \quad C_1 \vartheta'' - L\mathbf{t} \times \vartheta' + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (132)$$

Краевые условия для системы (132) имеют прежний вид (128).

Итак, с формальной точки зрения системы (129) и (132) эквивалентны для частного случая возмущений (131). Следует при этом иметь в виду, что в системе (132) вектор ϑ соответствует вектору ϑ_γ в системе (129). Вообразим теперь следующую ситуацию. Пусть решение задачи (129) обладает следующим свойством $\vartheta \rightarrow 0, \dot{\gamma} \rightarrow \infty$, т.е. по переменной γ имеем неустойчивость. Но с физической точки зрения этот вид неустойчивости совершенно несущественен, ибо неустойчивая переменная исчезает в окончательном решении, как это видно из выражения (123). Совершенно иначе обстоит дело при анализе системы (132). В ней неустойчивая переменная γ входит в состав вектора ϑ . Поэтому, если ограничиться только вычислением собственных частот и не проводить дальнейший анализ получившегося решения, то мы получим вывод о неустойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня при сколь угодно малом значении крутящего момента, т.е. придем к так называемому парадоксу Николаи¹. Ниже мы будем рассматривать систему (129), но для переменной β примем

¹**Историческая справка.** О неустойчивости равновесной конфигурации стержня, скрученного следящим или мертвым моментом, при сколь угодно малом значении крутящего момента впервые было доложено на двух заседаниях Ленинградского механического общества 26 мая и 29 сентября 1927 г. профессором Политехнического института Е.Л. Николаи. Опубликована эта работа была в Известиях Политехнического института в 1928 г. На заседаниях присутствовали выдающиеся ленинградские ученые, среди которых были, в частности, П.Ф. Папкович и А.И. Лурье. На первом заседании сообщение Е.Л. Николаи букваль-

начальные условия (128). Иными словами, ниже будет анализироваться следующая система

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' &= \rho F \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times (\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right], \\ C_1 \boldsymbol{\vartheta}'' + L \boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} &= 0. \end{aligned} \quad (133)$$

Решение системы (132) при краевых условиях (128) было построено А. Трешем (1952), который показал, что оно содержит экспоненциально растущие во времени слагаемые при любом сколь угодно малом значении крутящего момента L . Отсюда вытекает парадоксальный вывод о том, что равновесная конфигурация скрученного стержня, определяемая формулами (118) и (119), неустойчива при сколь угодно малом значении крутящего момента L . Это явление известно в механике под названием парадокса Николаи, поскольку именно Е.Л. Николаи впервые его обнаружил, но Е.Л. Николаи рассматривал безынерционный стержень с точечной массой на свободном конце стержня. Объясняют парадокс Николаи неконсервативностью задачи о кручении стержня, подразумевая при этом, что в систему накачивается энергия. Подтверждающие это утверждение правдоподобные рассуждения приводит Г. Циглер [1]. Однако такое объяснение, хотя и возможно, трудно признать всеобъемлющим. Например, в работе [11] показано, что парадокс Николаи имеет место в задаче о кручении стержня консервативным следящим моментом, когда накачка энергии в систему заведомо невозможна. Поэтому необходимо искать и другие объяснения. К тому же, результаты А. Треша, воспроизведенные в [2], трудно признать удовлетворительными с чисто математической точки зрения, поскольку он учел только половину корней характеристического уравнения². Впрочем, если все сделать правильно, то основной вывод А. Треша не изменится.

Точное решение системы (133) представляется затруднительным. Поэтому обратимся к ее приближенному решению, основанному на специфическом представлении вектора поворота (123). С этой целью вычислим производные от вектора поворота (123)

$$\boldsymbol{\vartheta}' = \vartheta' \mathbf{e}_* + \underline{\partial \bar{\psi}'} \times \mathbf{e}_* \simeq \vartheta' \mathbf{e}_* \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vartheta}^{(k)} = \vartheta^{(k)} \mathbf{e}_*.$$

В этом выражении подчеркнутое слагаемое имеет второй порядок малости, поскольку функция $\bar{\psi}$, в отличие от функции $\psi(s, t) = \gamma(t) + \bar{\psi}(s, t)$, характеризует

но шокировало всех присутствующих, ибо понятие эйлеровой критической силы было хорошо знакомо и понятно всем присутствующим. Все, разумеется, ожидали аналогичного явления и при действии крутящего момента: при малых значениях момента должна быть устойчивость, а при превышении моментом некоторого критического значения — неустойчивость. Однако результат анализа показал, что это не так. Первым, кто указал на возможную причину столь странного поведения стержня при кручении, был П.Ф. Папкович. А именно, он указал, что речь идет о неконсервативной задаче, а, следовательно, в систему может накачиваться энергия. Это объяснение примирило присутствующих с парадоксом Николаи. В самом деле, рассмотрим, например, линейный осциллятор со сколь угодно малым внешним возмущением, пропорциональным скорости

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = \varepsilon \dot{x}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В этом случае имеем отрицательное трение и решение экспоненциально нарастает во времени при сколь угодно малом ε . Как бы то ни было, но обсуждаемые сообщения Е.Л. Николаи положили начало новому и чрезвычайно важному разделу механики — теории устойчивости неконсервативных систем.

²А. Треш счел возможным не рассматривать комплексно сопряженные корни характеристического уравнения и отвечающие ему частные решения. В общем случае, частотное уравнение есть определитель восьмого порядка, а не четвертого. Более того, этот определитель не имеет блочной структуры, поэтому, вообще говоря, он не сводится к вычислению определителя четвертого порядка.

дополнительное упругое закручивание стержня (основное закручивание характеризуется углом $\beta = \psi + \varphi$) и является малым. По этой причине подчеркнутое слагаемое в линейной теории должно быть отброшено. В то же время функция $\gamma(t)$ малой не является. Совершенно аналогично обстоит дело и при вычислении производных по времени от вектора поворота. Собственно, именно желание выделить немалые вращения и вынудило нас представить вектор поворота ϑ_γ в виде композиции (123). Вектор поперечной силы \mathbf{N} представим в виде разложения

$$\mathbf{t} \times \mathbf{N} = N_1 \mathbf{e}_* + N_2 \mathbf{t} \times \mathbf{e}_*.$$

С учетом всего сказанного систему (133) можно переписать в виде³

$$\begin{aligned} N_1'' \mathbf{e}_* + N_2'' \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* &= \rho F [(\ddot{\vartheta} - \dot{\gamma}^2 \vartheta) \mathbf{e}_* + (\dot{\gamma} \vartheta + 2\dot{\gamma} \dot{\vartheta}) \mathbf{t} \times \mathbf{e}_*], \\ (C_1 \vartheta'' + N_1) \mathbf{e}_* + (N_2 - L \vartheta') \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* &= 0. \end{aligned} \quad (134)$$

Список литературы

- [1] Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 191 с.
- [2] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
- [3] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ, N386, 1982. С. 29–46.
- [4] Биргер И.А., Пановко Я.Г. (ред.) Прочность • Устойчивость • Колебания. Т. I. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
- [5] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [6] Лейбович С., Сибасс А. (ред.) Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 319 с.
- [7] Слепьян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
- [8] Келлер Дж.Б., Антман С. (ред.) Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. 254 с.
- [9] Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.-М.: ГИТТЛ, 1948. 170 с.
- [10] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 275 с.
- [11] Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом. // Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. №448. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1994. С. 47 - 56.

³На этом рукопись обрывается. К сожалению, болезнь не позволила П. А. Жилину закончить работу над статьей. Прим. редактора.

Основные публикации П.А. Жилина

1. Жилин П.А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. N 5. С. 139–142.
2. Жилин П.А. Кизима Г.А. Оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами // Труды ЦКТИ. 1966. N 72. С. 41–52.
3. Жилин П.А. К анализу краевых задач для ребристых оболочек // Труды ЦКТИ. 1966. N 72. С. 26–40.
4. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. N 6. С. 169.
5. Жилин П.А., Кизима Г.А. Оболочки нулевой кривизны с меридиональными ребрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. N 3. С. 102–105.
6. Жилин П.А. Теория ребристых оболочек и ее приложения // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. N 5.
7. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек // Труды ЦКТИ. 1968. N 88. С. 46–70.
8. Жилин П.А. Михеев В.И. Торообразная оболочка с меридиональными ребрами для расчета спиральных камер гидротурбин // Труды ЦКТИ. 1968. N 88. С. 91–99.
9. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ленинград. 1968. 15 с.
10. Жилин П.А. Кизима Г.А. Сферический пояс с меридиональными ребрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. N 5. С. 97–105.
11. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. N 4. С. 150–162.
12. Жилин П.А. Двумерная деформируемая среда. Математическая теория и физические интерпретации // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. N 6. С. 207–208.

13. Жилин П.А. Современная трактовка теории оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. N 4.
14. Жилин П.А., Лурье А.И. Механика твердых деформируемых тел. (Рецензия на книгу) // АН СССР. Успехи физических наук. 1974. Т. 112, вып. 4. С. 731–733.
15. Гловацкий Е.Д., Жилин П.А., Кулухов В.И., Логвинов В.И., Сидоренко А.П. Авторское свидетельство N 84598 с приоритетом от 18 марта 1974 г.
16. Жилин П.А., Лурье А.И. Предисловие редакторов перевода к книге: К. Трусделл “Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред”. М.: Мир. 1975. С. 5–7.
17. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Surfaces. The Danish Center for Appl. Math and Mech. Report N 89. 1975. P. 1–29.
18. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces and Shell Theory. The Danish Center for Appl. Math and Mech. Annual report. 1975.
19. Жилин П.А. Механика деформируемых оснащенных поверхностей // Тр. 9-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Л.: Судостроение. 1975. С. 48–54.
20. Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces // Int. J. Solids Structures. 1976. Vol. 12. P. 635–648.
21. Жилин П.А. Общая теория определяющих уравнений в линейной теории упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. N 3. С. 190.
22. Елисеев В.В., Жилин П.А., Пальмов В.А., Спирченко Ю.В., Чвартацкий Р.В. О стержневом методе расчета прочности и жесткости электромагнитной системы установок Токамак // Препринт ЛМ-0402 НИИЭФА. Л.: 1978. С. 1–9.
23. Елисеев В.В., Жилин П.А., Пальмов В.А., Спирченко Ю.В., Чвартацкий Р.В. Алгоритмы исследования напряженно-деформируемого состояния наружной камеры термоядерного реактора // Препринт ЛМ-0403 НИИЭФА. Л.: 1978. С. 1–9.
24. Жилин П.А. Новый метод построения теории тонких упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. N 3.
25. Жилин П.А. Об устойчивости упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. N 2.
26. Жилин П.А., Ильичева Т.П. Спектры и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученные на основе трехмерной теории упругости и теории пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. N 2. С. 94–103.
27. Жилин П.А. Прямое построение теории оболочек на основании физических принципов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. N 3. С. 179.
28. Altenbach H., Zhilin P.A. Ermittling der Steifigkeitsbeziehungen für dreisehichtschalen. Schiffbau technisches Symp. Schiffsfestigkeit und Schiffschwingungen, Heft 2, Rostock, DDR. 1980. S. 63–71.

29. Гаркави М.А., Жилин П.А., Рудельсон В.М. Асимптотический анализ плоской термоупругой задачи для рабочих валков листовых станков // Исследование, расчеты и конструирование машин металлургического производства. Сб. научных трудов. М.:ВНИИМЕТМАШ. 1980. С. 88–94.
30. Альтенбах Х., Жилин П.А. Устойчивость трехслойной полосы. Wissenschaftliche Zeitschrift, 9 Internat kongress, Weimar, DDR. 1982. Heft 3/4. S. 265–267.
31. Жилин П.А., Конюшевская Р.М., Пальмов В.А., Чвартацкий Р.В. К расчету напряженно-деформированного состояния разрядных камер установок Токамак. Л., НИИЭФА П-ОМ-0550. 1982. С. 1–13.
32. Altenbach H., Zhilin P.A. Die Bestimmung der Deformation sennergie fur dreischichtige, ortotrope, dunner, Schalen Konstanter Dicke. Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Otto von Guericke Magdeburg, DDR. **26** (1982). Heft 4. S. 7–10.
33. Altenbach H., Zhilin P.A. Eine nichtlineare Theorie duner Dreischichtschalen und ihre Anwendung aufdie Stabilitatsuntersuchung eines dreischichtigen Streifens // Technische Mechanic.,1982. Bd. 3, Heft 2. S. 23–30.
34. Жилин П.А., Ильичева Т.П. Сосредоточенное воздействие на шарнирно опертую плиту. Депонировано ВИНТИ N 4037-81 Деп. С. 1–16.
35. Жилин П.А., Голоскоков Д.П. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при кручении. // Водные пути и портовые сооружения. Сб. научных трудов ЛИВТа. 1982. С. 50–57.
36. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. N 386. 1982. С. 29–46.
37. Альтенбах Х., Жилин П.А. Бифуркация равновесия трехслойной полосы // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. N 386. 1982. С. 88–93.
38. Жилин П.А. Осесимметричный изгиб гибкой круглой пластинки при больших перемещениях // Вычислительные методы в механике и управлении. Труды ЛПИ. N 388. 1982. С. 97–106.
39. Жилин П.А., Голоскоков Д.П. Бифуркация равновесия тонкой цилиндрической оболочки при кручении. Депонировано ВИНТИ N 326-83. Деп. С. 1–32.
40. Жилин П.А., Скворцов В.Р. Описание простого краевого эффекта теорией оболочек и пространственной теорией упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N 5. С. 137–147.
41. Жилин П.А., Ильичева Т.П. Анализ применимости теории типа Тимошенко при сосредоточенном воздействии на пластину // Журнал “Прикладн. механика и техн. физика” СО АН СССР. 1984. N 1. С. 150–156.
42. Жилин П.А. Теория простых оболочек и ее приложения. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Ленинград. 1983. 32 с.

43. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Уравнения устойчивости круговой цилиндрической оболочки при кручении // Сб. "Математическая физика". Межвузовский сборник научных трудов. Ленинград. 1984. С. 42–46.
44. Жилин П.А. Осесимметричный изгиб круглой пластинки при больших перемещениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. N 3. С. 138–144.
45. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении // Водные пути и портовые сооружения. Сб. трудов ЛИВТа. 1983. С. 24–29.
46. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНТИ N 1912-B87 Деп. 20 с.
47. Жилин П.А., Каськов А.Н., Корель А.Г., Леонтьев Ю.И. Авторское свидетельство N 247134 с приоритетом от 16 января 1986 г.
48. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при кручении // Депонировано ВИНТИ N 10B292 Деп. N 4935-B87. 18 с.
49. Венатовский И.В., Жилин П.А., Комягин Д.Ю. Авторское свидетельство N 1490663 с приоритетом от 2 ноября 1987 г.
50. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Приложения тензорного исчисления // Мин. речного флота РСФСР. ЛИВТ. Ленинград. 1988. 62 с.
51. Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. Advances in mechanics — Warszawa, Polska. 1988. N 4. С. 107–148.
52. Воронин И.Е., Голод И.Л., Жилин П.А. Сопоставление частот и форм собственных колебаний шарнирно-опертого полого цилиндра по двумерной и трехмерной теориям. Депонировано ВИНТИ N 7B398 Деп. N 1925-B87. 26 с.
53. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. N 3. С. 48–64.
54. Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1992. N 443. С. 100–121.
55. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Пб.: Изд. СПбГТУ. 1992. 86 с.
56. Жилин П.А. О причинах логической несовместности уравнений электродинамики и классической механики // Проблемы динамики и прочности электро- и энергомашин. Всероссийский научный семинар 18–20 мая 1993 года, тезисы докладов. С.-Петербург. 1993. С. 7–8.
57. Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. СПбГТУ. С.-Петербург. 1993. 40 с.

58. Жилин П.А., Жилина О.П. О законах трения Кулона и парадоксах Пенлеве // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1993. N 446. С. 52–81.
59. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Кручение упругого консольного стержня моментом, приложенным на свободном торце. С.-Пб.: Изд. СПбГТУ. 1993. 32 с.
60. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Экспериментальное исследование устойчивости консольного стержня при кручении // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1993. N 446. С. 174–175.
61. Жилин П.А. Основные структуры и законы рациональной механики // Сб. докладов на 1-ом Всесоюзном совещании зав. каф. “Теорет. механика”, СПбГТУ, сент. 93. Изд. ВИКИ. 1994. С. 23–45.
62. Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. N 448. С. 3–38.
63. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. N 448. С. 47–56.
64. Жилин П.А. Новые результаты по анализу свободного вращения твердых тел. ИПМаш РАН, препринт N 102. 1994. 34 с.
65. Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики // Тр. XXII всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. С.-Петербург. 1995. С. 10–36.
66. Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Euler-Poinsot problem // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **75**. (1995) S 1. P. 133–134.
67. Жилин П.А., Иванова Е.А. Модифицированный функционал энергии в теории пластин типа Рейсснера // Изв. РАН. МТТ. 1995. N 2. С. 120–128.
68. Жилин П.А. О классической теории пластин и преобразовании Кельвина-Тэта // Изв. РАН. МТТ. 1995. N 4. С. 133–140.
69. Жилин П.А. Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1995. N 458. С. 56–73.
70. Жилин П.А., Вековищева И.А., Тхан Тъи Ань. Свободные поперечные колебания пьезоэлектрической пластинки, заземленной по контуру // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1995. N 458. С. 50–56.
71. Жилин П.А., Товстик Т.П. Вращение твердого тела на инерционном стержне // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. N 458. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1995. С. 78–83.

72. Жилин П.А., Кулеш Ю.Н., Федеров Г.С. Общее образование и социальные проблемы молодых людей с ослабленным здоровьем // В сб. "Молодежь в условиях социально-экономических реформ" — материалы международной научно-практической конференции. С.-Петербург. 1995. С. 119–120.
73. Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **76**. (1996) N 4. P. 187–204.
74. Жилин П.А. Реальность и механика // Тр. XXIII школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.-Петербург. 1996. С. 6–49.
75. Zhilin P.A. Classical and Modified Electrodynamics // Proc. of Int. Conf. "New Ideas in Natural Sciences". St.Petersburg, Russia. June 17–22, 1996. Part I – Physics. P. 73–82.
76. Zhilin P.A. Rotations of Rigid Body with Small Angles of Nutation // ZAMM. Z. angew. Math. Mech. **76**. (1996) S 2. P. 711–712.
77. Жилин П.А. Классическая и модифицированная электродинамика // Сб. трудов IV междунар. конф. "Проблемы пространства, времени и движения", посвященной 400-летию Декарта и 350-летию Лейбница. С.-Петербург, 23–29 сент. 1996. С.-Пб. 1997. Т. 2. С. 29–42.
78. Жилин П.А. Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на упругом основании // Тр. XXIV школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.-Петербург. 1997. С. 90–122.
79. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Тр. XXIV Всесоюзной школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.-Петербург. 1997. С. 313–337.
80. Zhilin P.A. Dynamic Forms of Equilibrium Bar Compressed by a Dead Force // Proc. of 1st Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos. Vol. 3. 1997. P. 399–402.
81. Жилин П.А., Кривцов А.М. Компьютерное моделирование сильного неупругого деформирования. Депонировано ВИНТИ. 21.04.97, N 1344-B97. 11 с.
82. Krivtsov A.M., Zhilin P.A. Particle Simulation of Large Inelastic Deformations // Transactions of the 14th International Conference on Structural Mechanics in Reactor technology (SMiRT 14), Lyon, France, August 17–22, 1997. P. 121–128.
83. Жилин П.А., Сорокин С.А. Мультироторный гиростат на нелинейно упругом основании // ИПМаш РАН: Препринт N 140. 1997. 83 с.
84. Grekova E.F., Zhilin P.A. Ferromagnets and Kelvin's Medium: Basic Equations and Magnetoacoustic Resonance // Proc. of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". Vol. 1. St.Petersburg. 1998. P. 259–281.

85. E.F. Grekova and P.A. Zhilin. Kelvin's medium and ferromagnets: constitutive equations and wave processes. *Nonlinear Acoustics of Solids. Proc. of VIII Session of the Russian Acoustical Society*. Nizhniy Novgorod, Russia. 1998. P. 87–90.
86. Zhilin P.A. A General Model of Rigid Body Oscillator // *Proc. of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems"*. Vol. 1. St.Petersburg. 1998. P. 288–314.
87. Zhilina O.P., Zhilin P.A. One Peculiarity of the Problems with Coulomb Friction // *Proc. of the XXV-XXIV Summer Schools "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems"*. Vol. 1. St.Petersburg. 1998. P. 315–320.
88. Zhilin P.A., Sorokin S.A. The Motion of Gyrostat on Nonlinear Elastic Foundation // *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* **78**. (1998) S 2. P. 837–838.
89. Zhilin P.A. Dynamics of the two rotors gyrostat on a nonlinear elastic foundation // *ZAMM. Z. angew. Math. Mech.* **79**. (1999) S 2. P. 399–400.
90. Жилин П.А. Образование и будущее России // *МОСТ (информационно-аналитический журнал для промышленников)*. 1999. N 25. С. 44–46.
91. Wiercigroch M., Zhilin P.A. On the Painleve Paradoxes // *Proc. of the XXVII Summer School "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems"*. St.Petersburg. 2000. P. 1–22.
92. Grekova E.F., Zhilin P.A. On the choice of strain tensors for magnetic materials and mechanical polar media // *Proc. of the XXVII Summer School "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems"*. St.Petersburg. 2000. P. 231–242.
93. Zhilin P.A. Rigid body oscillator: a general model and some results // *Acta Mechanica*. Vol. 142. (2000) P. 169–193.
94. Грекова Е.Ф., Жилин П.А. Уравнения упругих нелинейных полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики // *Нелинейные проблемы механики сплошных сред: Изв. высш. учеб. зав. Северо - Кавказский регион. Естественные науки* (2000). Спецвыпуск. С. 24–46.
95. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор. 2001. 276 с.
96. Жилин П.А., А.И. Лурье — работы по механике // *Тр. XXVIII летней школы "Актуальные проблемы механики"*. С.-Петербург. 2001. С. 1–13.
97. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // *Тр. XXVIII школы-семинара "Актуальные проблемы механики"*. С.-Петербург. 2001. С. 14–58.
98. Grekova E.F., Zhilin P.A. On the choice of strain tensor for nonlinear polar media, hypothesis of natural state, and linearization // *Proc. of the XXVIII Summer School "Actual Problems in Mechanics"*. St.Petersburg. 2001. P. 59–70.

99. Grekova E.F., Zhilin P.A. Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // *Journal of elasticity*. Vol. 64. (2001) P. 29–70.
100. Жилин П.А. Теоретическая механика. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2001. 146 с.
101. Zhilin P.A. Phase Transitions and General Theory of Elasto-Plastic Bodies // *Proc. of XXIX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics"*. St.Petersburg. 2002. P. 36–48.
102. Ivanova E.A., Zhilin P.A. Non-stationary regime of the motion of a rigid body on an elastic plate // *Proc. of XXIX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics"*. St.Petersburg. 2002. P. 357–363.
103. Kolpakov Ja. E., Zhilin P.A. Generalized continuum and linear theory of the piezoelectric materials // *Proc. of XXIX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics"*. St.Petersburg. 2002. P. 364–375.
104. Жилин П.А. Основные положения эйлеровой механики // *Тр. XXIX школы-семинара "Актуальные проблемы механики"*. С.-Петербург. 2002. С. 641–675.
105. Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P. A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2003. Vol. 15. N 6. P. 539–570.
106. Жилин П.А. Модифицированная теория симметрии тензоров и их инвариантов // *Нелинейные проблемы механики сплошных сред: Изв. высш. учеб. зав. Северо - Кавказский регион. Естественные науки (2003)*. Спецвыпуск. С. 176–195.
107. Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.
108. Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P.A. A micro-polar theory for binary media with application to flow of fiber suspensions // *Proc. of XXX Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics"*. St.Petersburg. 2003. P. 39–62.
109. Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // *Успехи механики*. Т. 2. N 4. 2003. С. 3–36.
110. Altenbach H., Zhilin P.A. The Theory of Simple Elastic Shells // in *Critical Review of The Theories of Plates and Shells and New Applications*, ed. by H. Altenbach and R. Kienzler. Berlin, Springer. 2004. P. 1–12.
111. Жилин П.А. К общей теории неупругих сред // *Механика материалов и прочность конструкций*. Труды СПбГПУ. N 489. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2004. С. 8–27.
112. Zhilin P.A. Symmetries and Orthogonal Invariants in Oriented Space // *Proc. of XXXII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics"*. St.Petersburg. 2005. P. 470–483.

113. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 167 с.
114. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2006. 98 с. (В печати)
115. Zhilin P.A. The Main Direction of the Development of Mechanics for XXI century // Lecture prepared for presentation at XXVIII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg, Russia. 2000. Current book. Vol. 2.
116. Жилин П.А. Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа // Доклад на XXXI летней школе "Актуальные проблемы механики". С.-Петербург. 2003. Настоящий сборник. Т. 1.
117. Жилин П.А. Теория тонких упругих стержней // Лекция на XXXIII летней школе - конференции "Актуальные проблемы механики". С.-Петербург. 2005. Настоящий сборник. Т. 1.
118. Zhilin P.A. Nonlinear Theory of Thin Rods // Lecture at XXXIII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg, Russia. 2005. Current book. Vol. 2.
119. Zhilin P.A., Kolpakov Ya.E. A micro-polar theory for piezoelectric materials // Lecture at XXXIII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics". St.Petersburg, Russia. 2005. Current book. Vol. 2.